

**Совместный бакалавриат ВШЭ-РЭШ, 2019-20 уч. год**  
**Дифференциальные уравнения** (<http://math-info.hse.ru/s19/g>)  
**Семинар 4. Фазовые пространства (7.02.2020)**

*И. Щуров, М. Матушко*

**Задача 1.** Для следующих систем уравнений:

- построить векторное поле и нарисовать эскизы фазовых кривых;
- решить — найти явно зависимость  $(x(t), y(t))$  (подсказка: в приведенных системах уравнения не зависят друг от друга);
- найти уравнения фазовых кривых, то есть зависимость  $y(x)$ .

$$\begin{array}{llll} \text{(a)} \quad \dot{x} = 2, \quad \dot{y} = 1; & \text{(c)} \quad \dot{x} = 1, \quad \dot{y} = y; & \text{(e)} \quad \dot{x} = 2x, \quad \dot{y} = y; & \text{(g)} \quad \dot{x} = x^2, \quad \dot{y} = -y; \\ \text{(b)} \quad \dot{x} = 0, \quad \dot{y} = y; & \text{(d)} \quad \dot{x} = x, \quad \dot{y} = y; & \text{(f)} \quad \dot{x} = x, \quad \dot{y} = -y; & \text{(h)} \quad \dot{x} = x^3, \quad \dot{y} = -y. \end{array}$$

**Задача 2.** Рассмотрим систему

$$\dot{x} = -y, \quad \dot{y} = x.$$

- (a) Нарисовать векторное поле.
- (b) Нарисовать эскиз фазовых кривых.
- (c) Угадать, как будут выглядеть настоящие фазовые кривые и доказать, что действительно так.

**Теорема 1.** Рассмотрим автономную систему

$$\dot{x} = f(x, y), \quad \dot{y} = g(x, y). \tag{1}$$

и неавтономное уравнение

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g(x, y)}{f(x, y)}. \tag{2}$$

Для любой точки  $P = (x_0, y_0)$ , такой, что  $f(x_0, y_0) \neq 0$ , фазовая кривая автономной системы (1), проходящая через  $P$ , в некоторой окрестности  $P$  совпадает с интегральной кривой соответствующего неавтономного уравнения (2).

**Задача 3.** Для следующих систем уравнений убедиться в том, что теорема 1 работает.

$$\text{(a)} \quad \dot{x} = x, \quad \dot{y} = y; \quad \text{(b)} \quad \dot{x} = x, \quad \dot{y} = -y; \quad \text{(c)} \quad \dot{x} = x^2, \quad \dot{y} = -y; \quad \text{(d)} \quad \dot{x} = -y, \quad \dot{y} = x.$$

**Задача 4.** Для следующих уравнений второго порядка записать соответствующую систему первого порядка, построить её векторное поле и найти фазовые кривые (можно в виде неявной функции) путём решения соответствующего неавтономного уравнения.

$$\text{(a)} \quad \ddot{x} = 1; \quad \text{(b)} \quad \ddot{x} = x; \quad \text{(c)} \quad \ddot{x} = \dot{x}; \quad \text{(d)} \quad (*) \quad \ddot{x} = \dot{x} + x.$$