

**Совместный бакалавриат ВШЭ-РЭШ, 2019-20 уч. год****Дифференциальные уравнения** (<http://math-info.hse.ru/s19/g>)**Семинар 3. Единственность решений и замены переменных (31.01.2020)**

И. Щуров, М. Матушко

**Задача 1.** Найти все решения уравнения  $\dot{x} = \sqrt[3]{x}$  с начальным условием  $x(0) = 0$ .**Задача 2.** Рассмотрим задачу Коши:

$$xy' = 3y, \quad y(-1) = 1.$$

(a) Показать, что любая функция вида

$$y(x) = \begin{cases} -x^3, & x \leq 0; \\ Cx^3, & x > 0. \end{cases}$$

удовлетворяет уравнению и начальному условию.

(b) Объяснить, почему это не противоречит теореме существования и единственности решения обыкновенного дифференциального уравнения?

**Задача 3.** [1] Подбирая подходящую замену решить уравнение.

(a)  $y' = \frac{y(1+xy)}{x(1-xy)}$ ;

(b)  $y' = -\frac{x+y+1}{4x+4y+10}$ ;

(c)  $y' = \sin(x+y)$ ;

(d)  $y' = \sqrt{4x+2y-1}$ ;

(e)  $(x+2y)y' = 1, \quad y(0) = -1$ ;

(f)  $xy' = x+y$ .

**Определение 1.** Уравнение вида  $\dot{x} = f(t, x)$  называется *однородным*<sup>1</sup>, если оно может быть записано в виде  $\dot{x} = g(x/t)$ .**Замечание 1.** *Однородные уравнения сводятся к уравнениям с разделяющимися переменными с помощью замены  $z = x/t$ .***Задача 4.** [1] Решите уравнения.

(a)  $xy' = y - xe^{y/x}$ ;

(b)  $(x^2 + y^2)y' = 2xy$ .

**Определение 2.** *Траекторией* непрерывной вектор-функции  $f: I \rightarrow \mathbb{R}^n, I \subset \mathbb{R}$  называется кривая

$$\{x(t) \mid t \in I\} \subset \mathbb{R}^n,$$

с указанным на ней направлением движения при возрастании  $t$ . Можно также сказать, что траектория — это проекция графика функции на пространство значений  $\mathbb{R}^n$ .**Задача 5.** Нарисовать графики и траектории следующих вектор-функций. Для каждой вектор-функции для каких-нибудь трёх различных значений  $t$  (обозначаемых  $t_i, i = 1, 2, 3$ ), найти  $\dot{\varphi}(t_i)$  и на рисунке с траекторией отложить от точки  $\varphi(t_i)$  вектор, равный  $\dot{\varphi}(t_i)$ .

(a)  $\varphi(t) = (\cos t, \sin t), \quad t \in [0, 2\pi)$ ;

(b)  $\varphi(t) = (\sin t, \cos t), \quad t \in [0, 2\pi)$ ;

(c)  $\varphi(t) = (t \cos t, t \sin t), \quad t \geq 0$ ;

(d)  $\varphi(t) = (\sqrt{1-t}, \sqrt{t}), \quad t \in [0, 1]$ .

**Список литературы**

[1] Филиппов А. Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. — Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2000.

<sup>1</sup>Это слово в дифференциальных уравнениях имеет разные смыслы — в будущем мы столкнёмся с линейными однородными уравнениями, которые не имеют ничего общего с теми уравнениями, которые обсуждаются здесь. Извините, это не мы придумали.