Совместный бакалавриат ВШЭ-РЭШ, 2019-20 уч. год
Дифференциальные уравнения (http://math-info.hse.ru/s19/g)
Семинар 2. Уравнения с разделяющимися переменными (24.01)
И. Щуров, М. Матушко

Замечание 1. *Существует несколько способов записывать дифференциальные уравнения. На лекциях мы пользовались в основном обозначением $\dot{x} = f(x,t)$. В дальнейшем мы будем также часто обозначать независимую переменную через x, а искомую функцию через y, и записывать уравнение в виде $y' = f(x,y)$ или $dy/dx = f(x,y)$. Потом мы будем пользоваться и другими способами записи.*

Определение 1. Геометрическое место точек плоскости (x,y), в которых наклон касательных к решениям уравнения $y' = f(x,y)$ один и тот же, называется *изоклиной*. Уравнение изоклины имеет вид $f(x,y) = k$, где k — постоянная.

Задача 1. Начертить несколько разных изоклин для следующих уравнений. Затем начертить эскизы интегральных кривых.

(a) $y' = 2x - y$.
(b) $y' = y - x^2$.
(c) $y' = \frac{x^2+y^2}{2} - 1$.
(d) $yy' + x = 0$.
(e) $xy' = 2y$.
(f) $xy' + y = 0$.
(g) $y' = \frac{y}{x+y}$.

Задача 2. [1], см. также [2] и [3]. Предположим, что скорость прироста популяции пропорциональна не числу особей, а *квадрату* числа особей. Составить и решить соответствующее уравнение, построить поле направлений и интегральные кривые. Что вы можете сказать о вертикальных асимптотах решения? Какую интерпретацию этого явления вы можете привести? Что вы можете сказать об области определения решений?

Задача 3. Решая уравнение $y' = y$ с начальным условием $y(0) = 1$ методом Эйлера и устремляя шаг к нулю, найти выражение для числа e.

Задача 4. [4] Найти все[1] решения уравнений. Также найти явно все решения с заданными начальными условиями, если они указаны.

(a) $y' = x^2$.
(b) $y' = e^x$.
(c) $y' = e^y$.
(d) $\dot{x} = t^2 + 1$, $x(1) = 2$
(e) $\dot{x} = -3x$, $x(3) = 10$.
(f) $\dot{x} = 2x + t$, $x(0) = -1/4$ (подсказка: рассмотреть замену $z = 2x + t$). Построить поле направлений и эскиз интегральных кривых.
(g) $\dot{x} = x^2 + 1$.
(h) $\dot{x} = x \ln x$, $x > 0$.
(i) $\dot{x} = 10^x$.
(j) $\dot{x} = 1/(t + 2x)$; $x(0) = -1$. Построить поле направлений и эскиз интегральных кривых.
(k) $\dot{x} = \cos(x - t)$.

Определение 2. Дифференциальное уравнение вида

$$y' = \frac{f(y)}{g(x)} \tag{1}$$

называется дифференциальным уравнением *с разделяющимися переменными.*

[1] Строго говоря, мы ещё не обсуждали теорему, которая бы позволила доказать, что найдены действительно все решения; найдите по крайней мере все решения, которые можно найти с помощью методов, обсуждавшихся на лекции.

Замечание 2. *Для уравнений с разделяющимися переменными есть явный алгоритм отсыкания решений (правда, иногда эти решения могут будут заданы неявной функцией).*

Запишем уравнение (1) *в виде:*

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(y)}{g(x)}$$

Дальше магия (мы обсудим, какой смысл означает это равенство, когда освоимся с дифференциальными формами):

$$\frac{dy}{f(y)} = \frac{dx}{g(x)}$$

Интегрируем:

$$\int \frac{dy}{f(y)} = \int \frac{dx}{g(x)}$$

После интегрирования получается равенство, связывающее y и x, то есть выражающее неявно функцию $y(x)$.

Если была поставлена задача Коши с начальным условием $y(x_0) = y_0$, решение можно записать в таком виде:

$$\int_{y_0}^{y(x)} \frac{dz}{f(z)} = \int_{x_0}^{x} \frac{d\xi}{g(\xi)} \tag{2}$$

Задача 5. (*) Пусть $F(y) = \int_{y_0}^{y} \frac{dz}{f(z)}$ и $y = y(x)$ — некоторая функция.

(a) Найти $\frac{d}{dx}F(y(x))$ (выразить результат через $f(y(x))$ и $y'(x)$).

(b) Дифференцируя обе части равенства (2) по переменной x, показать, что функция $y(x)$, удовлетворяющая (2), удовлетворяет также (1), то есть является решением исходного уравнения.

Задача 6. Найдите все[2] решения уравнения с разделяющимися переменными. Нарисуйте соответствующее поле направлений и его *интегральные кривые*.

(a) $y' = y/x$;

(b) $y' = 2y/x$;

(c) $y' = y/(2x)$;

(d) $y' = -y/x$;

(e) $y' = -x/y$;

(f) $y' = xy$;

(g) $y' = -xy$.

Задача 7. [4] Решите уравнения:

(a) $(x^2 + 4)y' = 2xy$;

(b) $y' = -xe^y$;

(c) $y' \operatorname{ctg}^2(x) + \operatorname{tg}^2(y) = 0$;

(d) $xy' + y = y^2$.

Список литературы

[1] Арнольд В. И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. — Ижевск: Ижевская республиканская типография. 2000. — 368 с.

[2] Heinz von Foerster, P. M. Mora and L. W. Amiot (November 1960) *Doomsday: Friday, 13 November, A.D. 2026. At this date human population will approach infinity if it grows as it has grown in the last two millenia.* Science **132** (3436): 1291–1295.doi:10.1126/science.132.3436.1291

[3] Щуров И. В. На пути к концу света. // N+1, 9.07.2015. `https://nplus1.ru/material/2015/07/09/doomsday`.

[4] Филиппов А. Ф. Сборник задач по дифференциальных уравннеиям. — Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2000.

[2] см. предыдущую сноску