Совместный бакалавриат ВШЭ-РЭШ, 2019-20 уч. год
Дифференциальные уравнения (http://math-info.hse.ru/s19/g)
Видеолекция. Анализ поведения интегральных кривых дифференциальных уравнений (18 марта 2020 года)
И. Щуров, М. Матушко

Задача 1. Рассмотрим уравнение

$$y' = \frac{1}{y - x^2}, \qquad y(x_0) = y_0.$$

Покажите, что область определения уравнения — это две открытые области. Что можете сказать о существовании и единственности решений? Исследуйте монотонность, выпуклость и вогнутость решений

Для случая $y_0 > x_0^2$ докажите, что:

- решение существует на полуограниченном интервале $(a, +\infty)$
- решения имеют следующее асимптотическое поведение $y(x) = x^2 + o(1)$ при $x \to +\infty$ (от противного)
- на границе интервала $\lim\limits_{x \to a^+} y(x) = a^2$, $\lim\limits_{x \to a^+} y'(x) = +\infty$

Аналогично проведите анализ для области $y_0 < x_0^2$.

Задача 2. Для дифференциального уравнения

$$y' = |y| - x^2, \quad y(x_0) = y_0$$

- исследовать существование и единственность решений
- исследовать интервалы монотонности
- исследовать интервалы выпуклости или вогнутости и точки перегиба
- указать максимальные интервалы существования решения
- нарисовать качественную картину траекторий в зависимости от (x_0, y_0)