Совместный бакалавриат ВШЭ-РЭШ, 2019-20 уч. год
Линейная алгебра
Семинар №12: диагонализируемые операторы (8 апреля 2020)

М. Матушко, И. Машанова, И. Щуров, И. Эрлих

Листок частично основан на материалах курса И. А. Хованской

Задача 1. Докажите, что геометрическая кратность собственного значения не превосходит алгебраическую.

Задача 2. При каком значении параметра s матрица диагонализируема?

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & s \end{pmatrix}$$

Задача 3. Пусть $\boldsymbol{A}\colon V \to V$ — линейный оператор в линейном пространстве над $\mathbb{R}$ или над $\mathbb{C}$.

(a) Докажите, что $\operatorname{Ker} \boldsymbol{A}^2 \supset \operatorname{Ker} \boldsymbol{A}$.

(b) Докажите, что $\operatorname{Im} \boldsymbol{A}^2 \subset \operatorname{Im} \boldsymbol{A}$.

(c) Докажите, что $V = \operatorname{Ker} \boldsymbol{A} \oplus \operatorname{Im} \boldsymbol{A}$ тогда и только тогда, когда $\operatorname{Ker} \boldsymbol{A}^2 = \operatorname{Ker} \boldsymbol{A}$.

Задача 4. Докажите, что если оператор $\boldsymbol{A}\colon V \to V$ диагонализируемый, то $V = \operatorname{Ker} \boldsymbol{A} \oplus \operatorname{Im} \boldsymbol{A}$.

Определение 1. Пусть $V = L_1 \oplus L_2$. Линейный оператор $\boldsymbol{P}\colon V \to V$ называется проектором на L_1 параллельно L_2, если для каждого $x \in V$, такого что $x = x_1 + x_2$, где $x_1 \in L_1$, $x_2 \in L_2$, $\boldsymbol{P}x = x_1$.

Задача 5. Найдите $\operatorname{Ker} \boldsymbol{P}$, $\operatorname{Im} \boldsymbol{P}$, его собственные числа и собственные подпространства.

Задача 6. Докажите, что проектор диагонализируем. Что можно сказать про матрицу проектора в собственном базисе?

Задача 7. Докажите, что $\boldsymbol{P}$ является проектором тогда и только тогда, когда $\boldsymbol{P}^2 = \boldsymbol{P}$.

Определение 2. Линейные операторы $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ коммутируют, если $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA}$.

Задача 8. Пусть операторы $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ коммутируют, причём все собственные значения оператора $\boldsymbol{A}$ различны. Докажите, что оператор $\boldsymbol{B}$ диагонализируем, причём в качестве диагонализирующего базиса можно выбрать собственный базис для $\boldsymbol{A}$.

Задача 9. (a) Докажите, что если $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ — коммутирующие линейные операторы в линейном пространстве над $\mathbb{C}$, то у них есть общий собственный вектор.

(b) Приведите пример таких коммутирующих линейных операторов в линейном пространстве над $\mathbb{R}$, что у них нет общего собственного вектора.