

Совместный бакалавриат ВШЭ-РЭШ, 2019-20 уч. год

Линейная алгебра

Семинар №11: нахождение собственных значений (18 марта 2020)

М. Матушко, И. Машанова, И. Щуров, И. Эрлих

Замечание 1. Чтобы найти все собственные векторы и собственные значения оператора, заданного матрицей A , нужно найти характеристический многочлен $\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda E)$. Корни этого многочлена являются собственными значениями оператора. После того, как корни найдены, нужно по очереди их подставлять в уравнение $Av = \lambda v$ и решать его относительно собственного вектора v .

Задача 1. Найти все собственные векторы и соответствующие им собственные значения оператора, заданного матрицей A . Для каждой из указанных матриц найти, если это возможно, невырожденную матрицу C , для которой справедливо утверждение: $C^{-1}AC = D$, где D — некоторая диагональная матрица. Если такой матрицы C не существует, докажите это.

(a) $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} -1 & -6 & -6 \\ -3 & -4 & -6 \\ 3 & 6 & 8 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

(e) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$

(f) $\begin{pmatrix} -1 & 7 & 8 \\ -2 & 7 & 6 \\ 1 & -3 & -2 \end{pmatrix}$

Задача 2. Не пользуясь компьютером, найти A^{2020} , где

$$A = \begin{pmatrix} -4 & -6 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

Подсказка. Найдите такую матрицу C , что $A = CDC^{-1}$, где D — диагональная матрица. Выразите A^{2020} в виде произведения 2020 матриц вида CDC^{-1} (обратите внимание: многое сокращается).

Задача 3. Докажите, что у линейного оператора в трёхмерном пространстве всегда есть как минимум одно (вещественное) собственное значение.

Задача 4. Приведите пример линейного оператора в четырёхмерном пространстве, у которого нет (вещественных) собственных значений.

Задача 5. Что насчёт линейных операторов в пятимерном пространстве?