Совместный бакалавриат ВШЭ-РЭШ, 2019-20 уч. год
Линейная алгебра
Семинар №10: матрица отображения, замена базиса (11 марта 2020)

М. Матушко, И. Машанова, И. Щуров, И. Эрлих

Листок частично основан на материалах курса И. А. Хованской

Задача 1. Пусть в пространстве V задан базис (e_1, e_2). В этом базисе линейный оператор $\mathcal{A}$ задаётся матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Новый базис (e'_1, e'_2) повёрнут относительно старого на $3\pi/4$ против часовой стрелки (от вектора e_1 к вектору e_2), а длины новых базисных векторов в $\sqrt{2}$ раз больше длин старых базисных векторов. Найти матрицу A' оператора $\mathcal{A}$ в новом базисе.

Задача 2. Рассмотрите отображение f из пространства V функций v вида $e^{2x}P(x)$, где $P(x)$ — многочлен степени не выше 3, в пространство M многочленов степени не выше 2:

$$f(v) = e^{-2x}(v'' - 4v).$$

(a) Докажите, что f — линейный оператор.
(b) Рассмотрим в пространстве V набор векторов e^{2x}, xe^{2x}, x^2e^{2x}, x^3e^{2x}. Докажите, что это базис пространства V.
(c) Рассмотрим в пространстве M набор векторов 1, x, x^2. Докажите, что это базис пространства M.
(d) Постройте в описанных выше базисах матрицу A отображения f.
(e) Найдите пару базисов в пространствах V и M, в которых матрица D отображения f диагональна, причём на диагонали только нули и единицы.
(f) Найдите такие невырожденные матрицы B и C, что $A = BDC$.

Задача 3. Рассмотрим конечномерные векторные пространства U и V. Пусть задано линейное отображение $\mathcal{A}\colon U \to V$. Докажите, что существуют такие базисы $\mathcal{E}$ и $\mathcal{G}$ в пространствах U и V соответственно, что матрица оператора $\mathcal{A}$ в этих базисах имеет следующий вид: на всех местах стоят нули, кроме первых несколько диагнальных элементов (то есть элементов с равными индексами), на которых стоять единицы.

Задача 4. Рассмотрим линейный оператор, который в стандартном базисе имеет матрицу

(a) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Как изменится матрица этого оператора, если первый базисный вектор вытянуть в пять раз, а второй сжать в семь (с сохранением направления)?

Попробуйте сначала угадать ответ.

Задача 5. Пусть в векторном пространстве V заданы базисы $(e_1, \ldots, e_n)$ и $(e'_1, \ldots, e'_n)$. Рассмотрим линейный оператор F, переводящий векторы e_i в векторы e'_i, $i = 1, \ldots, n$. Пусть его матрица в базисе $(e_1, \ldots, e_n)$ равна C. Найдите матрицу этого же оператора в базисе $(e'_1, \ldots, e'_n)$.

Попробуйте сначала угадать ответ. (Когда этот вопрос пришёл в голову лектору, он угадал неправильно.)

Определение 1. Вектор $v \neq 0$ называется *собственным вектором* линейного оператора $\mathcal{A}$, если существует такое число λ, что $Av = \lambda v$. Число λ называется *собственным значением* оператора $\mathcal{A}$, соответствующего собственному вектору v.

Задача 6. Найти как можно больше линейно независимых собственных векторов следующих линейных операторов (везде, где упоминаются координаты, используется стандартный базис):

(a) тождественное отображение;
(b) поворот плоскости на $\pi/2$ против часовой стрелки;
(c) линейный оператор с матрицей
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix};$$
(d) симметрия трёхмерного пространства относительно плоскости $x_1 = 0$;
(e) поворот трёхмерного пространства относительно прямой Ox_1;
(f) ортогональная проекция плоскости на прямую Ox_1;
(g) линейный оператор из задачи 1;
(h) оператор, действующий на трёхмерном пространстве, заданный матрицей
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix};$$
(i) оператор дифференцирования на пространстве многочленов степени не больше 2;
(j) (*) оператор дифференцирования на пространстве бесконечно дифференцируемых функций.

Задача 7. Линейный оператор $\mathcal{A}$, действующий на плоскости, имеет два собственных вектора: $(2, 3)$ с собственым значением 1 и $(3, 5)$ с собственным значением 2. Найти матрицу оператора $\mathcal{A}$.

Задача 8. Рассмотрим несколько собственных векторов линейного оператора. Пусть они имеют попарно различные собственные значения. Докажите, что они линейно независимы.

Задача 9. Докажите, что линейный оператор, действующий в n-мерном пространстве, не может иметь больше, чем n различных собственных значений.