Совместный бакалавриат ВШЭ-РЭШ, 2019-20 уч. год
Линейная алгебра
Семинар №9: матрица отображения, замена базиса (6 марта 2020)
М. Матушко, И. Машанова, И. Щуров, И. Эрлих

Листок частично основан на материалах курса И. А. Хованской

Задача 1. Пусть в пространстве L имеются два базиса: $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3)$ и $\mathcal{E}' = (e_1', e_2', e_3')$, связанные следующим образом:

$$e_1' = e_1 + e_2 + e_3, \quad e_2' = e_1 - e_2 + e_3, \quad e_3' = e_1 + 2e_3.$$

Найти координаты в базисе $\mathcal{E}$ вектора v, имеющего следующие координаты в базисе $\mathcal{E}'$:

(a) $(1, 0, 0)$; (b) $(0, 1, 0)$; (c) $(1, 2, 3)$; (d) (x_1, x_2, x_3).

Задача 2. В условиях предыдущей задачи найти координаты в базисе $\mathcal{E}'$ вектора v, имеющего в базисе $\mathcal{E}$ следующие координаты:

(a) $(1, 0, 0)$; (b) $(0, 1, 0)$; (c) $(1, 2, 3)$; (d) (x_1, x_2, x_3).

Задача 3. В некотором пространстве, некотором подпространстве, жили-были два вектора: u и v. В некотором базисе они имели координаты $(1, 2, 3)$ и $(2, 4, 6)$ соответственно. Тут приехал новый базис и переразложил векторы по-своему, а как именно — то неведомо. Ведомо только, что вектор u в новом базисе стал иметь координаты $(2, 5, -3)$. Найти координаты вектора v в новом базисе, если это возможно.

Задача 4. Рассмотрим линейное отображение $F : L \to M$. Пусть e_1, e_2, e_3 — базис в пространстве L и f_1, f_2, f_3, f_4 — базис в пространстве M. Известно, что

$$F(e_1) = f_1 + f_2 + f_3 + f_4 \tag{1}$$
$$F(e_2) = f_3 - f_4 \tag{2}$$
$$F(e_3) = 2f_2 + f_3 \tag{3}$$

(a) Чему равно $F(e_1 + e_2 + e_3)$?
(b) Чему равно $F(2e_1 - 3e_2 + 4e_3)$?
(c) Записать матрицу линейного отображения F в заданных базисах.

Задача 5. Даны линейные пространства V и W над полем вещественных чисел. Пространство V — двумерное, пространство W — трехмерное. Линейное отображение пространства V в пространство W в базисах (e_1, e_2) и (g_1, g_2, g_3) задано матрицей

(a) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$; (b) $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

- образы базисных векторов, выразите их в координатах и как линейную комбинацию базисных;
- образ вектора $x = 2e_1 - 3e_2$, выразите в координатах и как линейную комбинацию базисных;
- ядро и образ отображения, найдите базис ядра отображения.

Замечание 1. *Когда обсуждаются линейные операторы, действующие из некоторого пространства V в себя, как правило, подразумевается, что базис в обоих экземплярах V (откуда действует и куда действует оператор) выбираются одинаковыми.*

Задача 6. Рассмотрим линейное пространство V функций вида $P(x)e^x$, где $P(x)$ — многочлен степени не выше 2.

(a) Найти какой-нибудь базис в этом пространстве.

(b) Найти матрицу оператора дифференцирования в этом базисе.

Задача 7. Рассмотрим линейные пространства V и W. Первое является трёхмерным, в нём задан базис $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3)$. Второе является двумерным, в нём задан базис $\mathcal{G} = (g_1, g_2)$. Отображение $F\colon V \to W$ в базисах $(\mathcal{E}, \mathcal{G})$ задано матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим новый базис $\mathcal{E}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ в пространстве V. Пусть $e'_1 = e_1 + 2e_2 - 5e_3$, $e'_2 = e_1 - e_3$, $e'_3 = e_2 + e_3$. Найти матрицу отображения F в базисах $(\mathcal{E}', \mathcal{G})$.

Задача 8. В условиях предыдущей задачи рассмотрим новый базис в пространстве W. Обозначим его через $\mathcal{G}' = (g'_1, g'_2)$. Пусть $g'_1 = g_1 + 3g_2$, $g'_2 = g_1 + g_2$. Найти матрицу отображения F из предыдущей задачи в базисах

(a) $(\mathcal{E}, \mathcal{G}')$

(b) $(\mathcal{E}', \mathcal{G}')$

Задача 9. Линейный оператор F из двумерного пространства V в себя в базисе (e_1, e_2) задан матрицей

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Новый базис (e'_1, e'_2) задан следующим образом: $e'_1 = 4e_1 + 3e_2$, $e'_2 = -5e_1 - 4e_2$.

(a) Найти координаты образа вектора e'_1 под действием F в базисе (e_1, e_2)

(b) Найти координаты образа вектра e'_1 под действием F в базисе (e'_1, e'_2).

(c) Найти матрицу оператора F в базисе (e'_1, e'_2).

Задача 10. Пусть в векторном пространстве V заданы базисы $\mathcal{E} = (e_1, \ldots, e_n)$ и $\mathcal{E}' = (e'_1, \ldots, e'_n)$. Пусть также известно, что линейный оператор F переводит векторы e_j в векторы e'_j для всех $j = 1, \ldots, n$. Обозначим матрицу оператора F в базисе $\mathcal{E}$ через C. Пусть произвольный вектор u имеет координаты $(u_1, \ldots, u_n)$ в базисе $\mathcal{E}$ и координаты $(u'_1, \ldots, u'_n)$ в базисе $\mathcal{E}'$. Выразить $(u_1, \ldots, u_n)$ через $(u'_1, \ldots, u'_n)$ и $(u'_1, \ldots, u'_n)$ через $(u_1, \ldots, u_n)$ с помощью матрицы C.