Совместный бакалавриат ВШЭ-РЭШ, 2019-20 уч. год
Линейная алгебра
Ещё больше задач для подготовки (7 марта 2020)
М. Матушко, И. Машанова, И. Щуров, И. Эрлих

Задача 1. Пусть в векторном пространстве задано скалярное произведение и для каждого вектора u определена его *норма*:

$$\|u\| = \sqrt{(u, u)}$$

Пусть линейный оператор A сохраняет норму, то есть для всякого вектора u, $\|Au\| = \|u\|$. Докажите, что оператор A:
- (a) сохраняет скалярное произведение, то есть для всяких векторов u и v, $(Au, Av) = (u, v)$;
- (b) в ортономированном базисе задаётся ортогональной матрицей, то есть $AA^T = A^T A = E$.

Определение 1. Линейные операторы, сохраняющие скалярное произведение, называются *линейными изометриями.*

Определение 2. Если определитель линейного оператора положителен, говорят, что этот оператор *сохраняет ориентацию.* Если отрицателен, он *меняет ориентацию.*

Задача 2. Докажите, что все линейные изометрии плоскости, сохраняющие ориентацию — это повороты. (Рассмотрим какой-нибудь ортонормированный базис. Куда может перейти первый базисный вектор? Если вы знаете, куда переходит первый базисный вектор, куда может переходить второй базисный вектор?)

Задача 3. Докажите, что все линейные изометрии плоскости, меняющие ориентацию — это отражения относительно прямой, то есть такие операторы, которые в подходящем ортонормированном базисе записываются матрицей

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(Пусть отображение является изометрией. Докажите, что все его собственные значения (вещественные или комплексные) по модулю равны 1. Докажите, что если линейный оператор на плоскости меняет ориентацию, его собственные значения вещественны.)

Задача 4. Докажите, что все линейные изометрии трёхмерного пространства, сохраняющие ориентацию — это повороты пространства вокруг некоторой оси. (Докажите, что у него обязательно есть вещественное собственное значение. Чему оно может быть равно? Как устроено ограничение оператора на подпространство, являющееся ортогональным дополнением к собственному подпространству с указанным вещественным собственным значением?)

Задача 5. Пусть оператор A является *самосопряжённым* относительно некоторого (не обязательно стандартного) скалярного произведения, то есть обладает следующим свойством: для всяких векторов u и v, $(Au, v) = (u, Av)$. Докажите, что существует базис, ортонормированный относительно этого скалярного произведения, в котором этот оператор задаётся диагнальной матрицей, и на диагонали стоят вещественные числа.

Задача 6. Пусть в линейном пространстве V с некоторым скалярным произведением задано подпространство W и его ортогональное дополнение $W^{\perp}$. Тогда любой вектор u однозначно раскладываются в сумму $u = w + w^{\perp}$, $w \in W$, $w^{\perp} \in W^{\perp}$. Докажите, что $\|u\|^2 = \|w\|^2 + \|w^{\perp}\|^2$.

Задача 7. Рассмотрим систему из k линейно независимых векторов $u_1, \ldots, u_k$ в n-мерном линейном пространстве V с заданным на нём скалярным произведением. Пусть стандартный базис ортонормирован. Запишем координаты этих векторов как столбцы матрицы X. (Матрица получится с n строками и k столбцами.) Рассмотрим оператор P, заданный матрицей $X(X^T X)^{-1} X^T$. Докажите, что

(a) оператор P является проектором, то есть $P^2 = P$;
(b) оператор P является проектором на линейную оболочку $L = \langle u_1, \ldots, u_k \rangle$, то есть образом оператора является это подпространство.
(c) оператор P является ортогональным проектором, то есть для любого $u \in V$ и любого $v \in L$, $u - Pu$ ортогонально v.

Задача 8. Пусть $u = OP$ — радиус-вектор точки P и W — некоторое линейное подпространство. Назовём *расстоянием* от точки P до W

$$\inf_{w \in W} \|u - w\|.$$

Иными словами, расстояние от точки P до подпространства W — это минимальное расстояние от P до точек, чьи радиус-векторы лежат в W. Докажите, что это расстояние равно длине ортогональной проекции вектора u на ортогональное дополнение к W. (Иными словами, если u представить в виде $u = w + w\ \perp$, $w \in W$, $w^{\perp} \in W^{\perp}$, то расстояние равно $\|w^{\perp}\|$.

Задача 9. Пусть X — матрица с k линейно независимыми столбцами и n строками, b — фиксированный n-мерный вектор-столбец, w — неизвестный k-мерный вектор-столбец. Рассмотрим задачу отыскания такого w, что $\|Xw - b\|$ минимален. Найти формулу для w. (Переформулируйте эту задачу в терминах предыдущих двух задач.)

Замечание 1. *Если X — квадратная матрица, $\|Xw - b\|$ минимизируется при таком w, что $Xw = b$, причём это w существует: оно равно $X^{-1}b$. Если матрица X не является квадратной, система $Xw = b$ может не иметь решения, однако можно найти такое w, что $\|Xw - b\|$ как можно меньше, то есть искать не точное, а «наиболее хорошее из возможных» решение. Предыдущая задача — ровно про это.*