

Совместный бакалавриат ВШЭ-РЭШ, 2019-20 уч. год

Линейная алгебра

Программа второй контрольной работы (16 апреля 2020 г.)

*М. Матушко, И. Машанова, И. Щуров, И. Эрлих*

## 1 Правила

Контрольная будет проходить в удалённом режиме с контролем времени. На выполнение работы выделено 120 минут. В ходе работы можно будет пользоваться любыми источниками информации и программными средствами, но нельзя как-либо обсуждать работу, задачи, их решения или ответы с другими людьми. Работа может быть разбита на несколько частей, которые будут выдаваться поэтапно. Студенты должны обеспечить себе бесперебойный доступ в интернет в течение всего времени работы, позволяющий принимать условия и сдавать решения. Рекомендуется иметь резервный канал доступа в интернет (например, два канала: проводной интернет и телефон). Также необходимо обеспечить наличие средств для оцифровки работ (сканер, телефон с фотокамерой достаточного качества, чтобы фотографии работы были хорошо читаемы, электронный планшет и т.д.)

## 2 Темы

1. Базис в линейном пространстве. Матрица линейного отображения в заданных базисах.
2. Примеры линейных операторов и их матриц (тождественное отображение, скалярный оператор, симметрии, повороты, проекции).
3. Замена базиса. Матрица перехода. Как меняются координаты векторов при переходе к новому базису.
4. Изменение матрицы линейного отображения при замене базисов. Частный случай: изменение матрицы линейного оператора при замене базиса.
5. Определитель линейного оператора. Его инвариантность при замене базиса. Геометрический смысл определителя линейного оператора.
6. Собственные векторы и собственные значения линейного оператора (или матрицы).
7. Характеристический многочлен. Нахождение собственных значений и собственных векторов. Диагонализация матриц.
8. Векторные пространства над полем комплексных чисел. Основная теорема алгебры, теорема Безу, разложение многочлена в произведение одночленов, кратность корня.
9. Комплексные собственные значения линейных операторов. Алгебраическая и геометрическая кратность собственного значения.
10. Критерий диагонализруемости оператора: совпадение алгебраических и геометрических кратностей.

11. Инвариантные подпространства линейных операторов. Как выглядит матрица линейного оператора в базисе, первые векторы которого принадлежат инвариантному подпространству? Если инвариантные пространства образуют прямую сумму, матрица линейного оператора в подходящем базисе блочно-диагональна.
12. Теорема Гамильтона — Кэли и её доказательство.
13. Нильпотентные операторы. Оператор нильпотентен тогда и только тогда, когда все его собственные значения равны нулю.
14. Оператор с единственным собственным значением равен сумме скалярного и нильпотентного.
15. Как устроены нильпотентные операторы с единственным собственным вектором (с доказательством). Как устроены произвольные нильпотентные операторы (без доказательства).
16. Корневое подпространство. Его инвариантность.
17. Жорданова нормальная форма (без доказательства).