Совместный бакалавриат ВШЭ-РЭШ, 2019-20 уч. год
Математический анализ 1 (http://math-info.hse.ru/s19/3)
Семинар 12 (18 октября 2019)
И. Щуров, М. Матушко, И. Машанова, И. Эрлих

Знаком (♮) отмечены задачи или пункты для самостоятельного решения. Их не планируется обсуждать на семинаре, но они могут быть включены в самостоятельную работу наравне с остальными задачами.

Задача 1. (♮) Студент К. записал определение предела функции следующим образом:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = a \Leftrightarrow (\forall\varepsilon > 0 \exists\delta > 0 \forall x\colon |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon).$$

В этом определении есть ошибка (найдите её). Что вы можете сказать про функцию, которая «имеет предел» согласно определению студента К.?

Задача 2. Пусть функция f имеет разрыв в точке x_0, а функция g непрерывна в точке $f(x_0)$. Может ли функция $h(x) = g(f(x))$ быть непрерывной в точке x_0? Считать что обе функции определены на всей числовой прямой.

Задача 3. (♮) Пусть функция f имеет разрыв в точке x_0, а функция g тоже имеет разрыв в точке $f(x_0)$. Может ли функция $h(x) = g(f(x))$ быть непрерывной в точке x_0? Считать что обе функции определены на всей числовой прямой.

Теорема 1. *Пусть f непрерывна на отрезке $[a, b]$ (в концах отрезка требуется односторонняя непрерывность) и $f(a)f(b) < 0$ (то есть в концах отрезка функция принимает разные знаки). В этом случае существует точка $c \in (a, b)$, являющаяся корнем функции f, то есть $f(c) = 0$.*

Задача 4. Докажите, *теорему о промежуточном значении*: если функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$, то для любого $y_0 \in [f(a), f(b)]$ (или $y_0 \in [f(b), f(a)]$) существует такое $x_0 \in [a, b]$, что $f(x_0) = y_0$.

Задача 5. Докажите, что уравнение имеет решение. Сколько решений оно имеет? (Здесь требуется использовать непрерывность корня третьей степени и логарифма. Мы этого не доказывали, но поверьте на слово: они непрерывны.)

(a) $x = \cos x$; (b) (♮) $\ln x = 3 - 2x$; (c) (♮) $\sqrt[3]{x} = 1 - x$.

Задача 6. (♮) Турист начал восхождение на гору в 7 утра. Он заночевал на вершине горы. На следующий день в 7 утра он начал спускаться с горы, и к вечеру вернулся на базу, с которой начинал путь. Докажите, что было такое время (например, 2 часа 58 минут 9 секунд), в которое он был на одной и той же высоте в первый и во второй день.

Задача 7. Пусть функция f определена и непрерывна во всех точках интервала (a, b). Рассмотрим её предельное множество в точке b. Докажите, что вместе с любыми двумя точками y_1 и y_2 это множество содержит и весь отрезок между ними.

Определение 1. Функция f строго возрастает (убывает) на множестве X если для любых $x_1 < x_2$ из множества X верно: $f(x_1) < f(x_2)$ (соотв., $f(x_1) > f(x_2)$). Если неравенство нестрогое, говорят, что функция *нестрого возрастает* (соотв., *нестрого убывает*) или *неубывает* (соотв., *невозрастает*). Возрастающие и убывающие функции вместе называется *монотонными*. Если множество X не указано, считается, что X — это вся область определения функции f.

Задача 8. Докажите, что строго монотонная функция, определённая на отрезке, может иметь только разрывы типа «скачок» (то есть пределы справа и слева существуют, но не равны друг другу).

Определение 2. Функция f называется *обратимой*, если она задаёт инъективное отображение, то есть для любых двух различных точек x_1, x_2 из области определения, $f(x_1) \neq f(x_2)$. В этом случае существует *обратная функция* f^{-1} — такая, что $f^{-1}(f(x)) = x$ для всех x из области определения f. Областью определения f^{-1} является область значений f и наоборот.

Задача 9. Докажите, что если функция f определена и непрерывна на отрезке $[a, b]$, а также обратима, то

(a) Её областью значений является отрезок $[f(a), f(b)]$ или $[f(b), f(a)]$.

(b) Она является строго монотонной.

(c) Обратная функция непрерывна на всей области определения.

Задача 10. Указать, в каком месте доказательство непрерывности обратной функции «ломается» при нарушении условия непрерывности функции f, а именно, для функции

(a) $f(x) = \begin{cases} x-1, & x \le 0 \\ x+1, & x > 0 \end{cases}$

(b) ($\natural$) $f(x) = \begin{cases} x-1, & x < 0 \\ 1-x, & x \in [0, 2] \end{cases}$

в точке $x_0 = 0$.

Задача 11. Пусть функция f имеет разрыв в точке x_0, а функция g строго монотонно возрастает и непрерывна на всей прямой. Докажите, что $h(x) = g(f(x))$ имеет разрыв в точке x_0. **Подсказка:** Рассмотрите функцию $g^{-1}(h(x))$.

Определение 3. Рассмотрим произвольное отображение $f\colon X \to Y$. *Полным прообразом* множества $B \subset Y$ называется множество $A \subset X$, заданное следующим образом: $A = \{x \in X \mid f(x) \in B\}$. *Образом* множества $A \subset X$ называется множество $B \subset Y$, заданное следующим образом: $B = \{f(x) \mid x \in A\}$.

Задача 12. Докажите, что если функция f определена и непрерывна на отрезке $[a, b]$, то полный прообраз любого открытого множества для этой функции является открытым множеством.

Задача 13. ($\natural$) Верно ли, что если функция f определена и непрерывна на отрезке $[a, b]$, то образ любого открытого множества под действием этой функции является открытым множеством?