

Совместный бакалавриат ВШЭ-РЭШ, 2019-20 уч. год**Математический анализ 1** (<http://math-info.hse.ru/s19/3>)**Семинар 11 (16 октября 2019)***И. Щуров, М. Матушко, И. Машанова, И. Эрлих*

Задача 1. (*) Доказать непрерывность функции $f(x) = e^x$ во всех точках.

Указание. Представить $e^x = e^{x_0} e^{x-x_0}$, затем доказать, что $\lim_{x \rightarrow x_0} e^{x-x_0} = 1$. Для последнего представить e^x как $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}$.

Задача 2. (*) Доказать непрерывность функции $f(x) = \sin x$ во всех точках.

Указание. Использовать формулу для синуса разности.

Задача 3. Доказать непрерывность функции $f(x) = \sqrt{x}$ для всех $x \geq 0$.

Задача 4. Сформулировать с помощью кванторов, что означает $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = +\infty$.

Задача 5. (*) Доказать *первый замечательный предел*:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Указание. Докажите из геометрических соображений, что $\sin x \leq x$ и $\operatorname{tg} x \geq x$. Отсюда следует, что

$$\cos x \leq \frac{\sin x}{x} \leq 1.$$

Задача 6. Какими нужно выбрать значения параметров a и b , чтобы следующая функция была непрерывной?

$$f(x) = \begin{cases} e^x, & x < 0 \\ ax + b, & 0 \leq x \leq 2 \\ x^2 - 3, & x > 2. \end{cases}$$

Задача 7. Найти естественную область определения функции, заданной формулой. (То есть множество всех x , при которых выражение, заданное формулой, определено.) Является ли функция ограниченной? Найти все точки разрывов, установить их тип (скачок, устранимый разрыв, полюс, существенный разрыв). Существуют ли такие точки, что функцию можно в этой точке до- или переопределить и сделать таким образом непрерывной в этой точке? Найти все вертикальные, горизонтальные и наклонные асимптоты.

(a) $\frac{x+2}{x^2-1}$

(c) $\frac{x^2-1}{x-1}$

(e) $\sqrt{x^2-1}$

(b) $\frac{x^2-1}{x-4}$

(d) $\frac{2x^2-1}{x^2-4}$

(f) $\sqrt{\frac{x^4-1}{x+1}}$

(g) $\frac{\sin x}{x}$

(h) $\frac{1}{\sin \frac{1}{x}}$

(i) $\frac{\sin \frac{1}{x}}{x}$

(j) $x \sin \frac{1}{x}$

(k) $x + \sin x$

(l) $x + \frac{\sin x}{x}$

(m) $\exp \frac{1}{x}$

(n) $\exp \left(-\frac{1}{x^2} \right)$

(o) $\begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$

(p) $\begin{cases} x, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$

(q) $\frac{|x|}{x}$

(r) $\frac{x^3 + 3^x}{x^2 + 2^x}$

(s) $\frac{x^2 - 2^x}{x^2 + 3^x}$