Совместный бакалавриат ВШЭ-РЭШ, 2019-20 уч. год
Математический анализ 1 (http://math-info.hse.ru/s19/3)
Семинар 10 (11 октября 2019)
И. Щуров, М. Матушко, И. Машанова, И. Эрлих

Задача 1. Построить график функции и найти пределы, или доказать, что они не существуют

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 1 \\ -x^2, & x \geq 1 \end{cases}$$

(a) $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$ (b) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ (c) $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$ (d) $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$

Задача 2. При каком значении параметра α существует предел функции

$$f(x) = \begin{cases} \alpha x^2, & x > 2 \\ 5\alpha^2, & x = 2 \\ x+7, & x > 2 \end{cases}$$

при $x \to 2$?

Задача 3. Приведите пример ограниченной функции, определённой на всей числовой прямой, имеющей в точке 0 предел справа, но не имеющей предела слева.

Задача 4. Доказать утверждения арифметики пределов: если существует $\lim_{x\to a} f(x)$ и $\lim_{x\to a} g(x)$, то

(a) $\lim\limits_{x\to a}(f(x) + g(x)) = \lim\limits_{x\to a} f(x) + \lim\limits_{x\to a} g(x)$;

(b) $\lim\limits_{x\to a}(f(x) \cdot g(x)) = \lim\limits_{x\to a} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to a} g(x)$;

(c) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$ при условии, что $\lim_{x\to a} g(x) \neq 0$.

(d) $\lim\limits_{x\to a} \sqrt{f(x)} = \sqrt{\lim\limits_{x\to a} f(x)}$ при условии, что $\lim_{x\to a} f(x) \geq 0$.

Задача 5. Пользуясь арифметикой пределов (если она применима) или определением найти пределы

(a) $\lim\limits_{x\to 2}(x^4 + 3x^2 - x + 1)$;

(b) $\lim\limits_{t\to -1}(t^2 + 1)^3(t + 3)^5$;

(c) $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(4+h)^2 - 16}{h}$;

(d) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x+2}{x^3+8}$;

(e) $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(2+h)^3 - 8}{h}$;

(f) $\lim\limits_{t\to 0} \left(\dfrac{1}{t} - \dfrac{1}{t^2+t}\right)$;

(g) $\lim\limits_{x\to -4} \dfrac{\sqrt{x^2+9} - 5}{x+4}$.

(h) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{x^2+9}{x^2-9}$;

(i) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2+9}{x^2-9}$;

(j) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^2}$;

(k) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{e^x}{x^2}$;

(l) $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2e^x$;

(m) $\lim\limits_{x\to 0^+} e^{1/x}$;

(n) $\lim\limits_{x\to 0^-} e^{1/x}$;

(o) $\lim\limits_{x\to 0^-} x^2e^{1/x}$;

Задача 6. Придумать и доказать теорему о двух миллиционерах для пределов функций.

Задача 7. С помощью теоремы о двух миллиционерах доказать, что

$$\lim_{x\to 0}(x^2+5x)\sin\frac{1}{x^2} = 0.$$

Задача 8. Докажите, что если функция f ограничена в проколотой окрестности точки x_0 (то есть существует такая константа C, что $|f(x)| < C$ для всех x из некоторой окрестности x_0) и $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$, то $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)g(x) = 0$.

Определение 1. Точка a называется *предельной точкой* функции f в точке x_0 если для всякого $\varepsilon > 0$ и всякой $\delta > 0$ найдётся такая точка x, лежащая в проколотой δ-окрестности x_0, что $f(x)$ лежит в ε-окрестности точки a.

Задача 9. Докажите, что точка a является предельной точкой функции f в точке x_0 тогда и только тогда, когда существует такая последовательность x_n, сходящаяся к x_0, $x_n \neq x_0$, что $f(x_n)$ сходится к a.

Задача 10. Докажите, что если ограниченная функция, определённая в левой полуокрестности некоторой точки, не имеет предела слева в этой точке, то её множество предельных точек в этой точке имеет более одного элемента.