**Совместный бакалавриат ВШЭ-РЭШ, 2019-20 уч. год**
**Математический анализ 1** (http://math-info.hse.ru/s19/3)
**Семинар 8 (4 октября 2019)**
*И. Щуров, М. Матушко, И. Машанова, И. Эрлих*

**Задача 1.** Найти предел последовательности $\{x_n\}$:
(a) $x_1 = \sqrt{2}, \quad x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n}, \quad n = 1, 2, \dots$
(b) $x_1 = \sqrt{2}, \quad x_{n+1} = \sqrt{2x_n}, \quad n = 1, 2, \dots$
(c) $x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k}$;
(d) (*) $x_n = \frac{u_n}{u_{n+1}}$, где $u_n$ — $n$-е число Фибоначчи.

**Задача 2.** Докажите, что из любой неограниченной последовательности можно выбрать подпоследовательность, сходящуюся к бесконечности.

**Определение 1.** Подмножество $X$ множества всех вещественных чисел называется *открытым*, если для любой точки $x \in X$ существует окрестность $(a, b) \ni x$, целиком лежащая в $X$.

**Определение 2.** Подмножество $X$ множества всех вещественных чисел называется *замкнутым*, если его дополнение $\mathbb{R} \setminus X$ является открытым.

**Задача 3.** Докажите, что чножество $X \subset \mathbb{R}$ является замкнутым если и только если предел любой сходящейся последовательности $\{x_n\}$, такой что $x_n \in X$ для всех $n \in \mathbb{N}$, лежит в $X$.

**Задача 4.** Рассмотрим множество

(a) $[0, 1] \cup \{2\}$;
(b) $(0, 1) \cup \{2\}$;
(c) $(0, 1) \cup (1, 2)$;
(d) $[0, 2] \setminus \{1\}$;
(e) $\mathbb{Q}$;
(f) $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$.

Является ли оно замкнутым? Открытым? Ни тем ни другим?

**Задача 5.** Является ли пустое множество замкнутым? А открытым? Аналогичный вопрос про $\mathbb{R}$.

**Задача 6.** Докажите, что для любой последовательности множество всех её предельных точек замкнуто.

**Задача 7.** Рассмотрим бесконечный набор множеств $\{X_n\}$, $n \in \mathbb{N}$. Пусть $X = \cup_{n\in\mathbb{N}} X_n$ — объединение всех этих множеств (элемент $x$ принадлежит $X$, если найдётся такое $n$, что $x \in X_n$). Докажите, что если все $X_n$ открыты, то $X$ открыто. Коротко говорят: счётное объединение открытых множество открыто.

**Задача 8.** Докажите, что счётное пересечение замкнутых множеств замкнуто.

**Задача 9.** Обязательно ли пересечение открытых множеств открыто? Непусто?

**Задача 10.** Обязательно ли счётное объединение замкнутых множеств замкнуто?

**Задача 11.** (*) Докажите, что интервал нельзя разбить в объединение двух непересекающихся непустых открытых множеств.

**Определение 3.** *Граничной точкой* множества $X \subset \mathbb{R}$ называется такая точка $a$, что в любой её окрестности содержатся как точки из $X$, так и точки из дополнения к $X$. Множество всех граничных точек $X$ называется *границей* и обозначается $\partial X$.

**Задача 12.** Найти границу множества

(a) $[1, 2]$;
(b) $(1, 2)$;
(c) $[1, 2)$;
(d) $\mathbb{R}$;
(e) $\mathbb{Q}$;
(f) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

**Определение 4.** *Замыканием* множества $X$ называется множество $\overline{X} = X \cup \partial X$. *Внутренностью* множества $X$ называется множество $\mathring{X} = X \setminus \partial X$.

**Задача 13.** Докажите, что замыкание множества является замкнутым множеством.

**Задача 14.** Докажите, что множество является замкнутым тогда и только тогда, когда оно совпадает со своим замыканием.

**Задача 15.** Докажите, что внутренность любого множества является открытым множеством.

**Задача 16.** Замыкание можно получить по-другому: добавить к множеству $X$ множество всевозможных предельных точек всевозможных последовательностей, лежащих в множестве $X$. Докажите, что получится то же самое, что и раньше.

**Задача 17.** Внутренней точкой множества называется точка, содержащаяся во множестве вместе с некоторой своей окрестностью. Докажите, что множество всех внутренних точек совпадает с внутренностью, определённой ранее.

**Задача 18.** Пусть $X \subset \mathbb{R}$ — множество, ограниченное сверху. Докажите, что

$$\sup X \in \partial X.$$