Совместный бакалавриат ВШЭ-РЭШ, 2019-20 уч. год
Математический анализ 1 (http://math-info.hse.ru/s19/3)
Семинар 7 (2 октября 2019)
И. Щуров, М. Матушко, И. Машанова, И. Эрлих

Рассмотрим последовательность $\{a_n\}$. Сумма $a_1+a_2+\ldots+a_k$ кратко обозначается следующим образом:

$$\sum_{i=1}^{k} a_i.$$

Например,

$$\sum_{i=1}^{3} \frac{1}{i} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}.$$

Рассмотрим теперь последовательность s_k:

$$s_k = \sum_{i=1}^{k} a_i.$$

Если существует $\lim\limits_{k\to\infty} s_k$, его обозначают через

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i = a_1 + a_2 + \ldots$$

Задача 1. Рассмотрим геометрическую прогрессию $b_n = cq^{n-1}$.

(a) Докажите, что

$$\sum_{i=1}^{n} b_n = c\frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

(b) Докажите, что при $|q| < 1$

$$\sum_{i=1}^{\infty} b_n = c\frac{1}{1 - q}.$$

Задача 2. Рассмотрим функцию $g(x) = \frac{1}{2}(x + \frac{2}{x})$, $x > 0$. Определим последовательность $\{x_n\}$ следующим образом: $x_1 = 1$, $x_{n+1} = g(x_n)$, $n = 1, 2, \ldots$. Доказать, что существует $\lim_{n\to\infty} x_n$ и найти его.

Задача 3. Докажите, что для любого натурального $n > 2$,

(a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} < 2;$

(b) $2 < \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n < 3.$

Задача 4. Буратино положил 1000 рублей на банковский счёт под 100% годовых. Проценты по счёту начисляются через равные промежутки времени n раз в год. Например, если $n = 1$, то проценты будут начислены один раз в конце года, если $n = 2$, то два раза — в середине и конце года (каждый раз будет начислено 50%) и т.д. Проценты начисляются с капитализацией (например, если $n = 2$, то в конце первого полугодия будут начислены проценты на исходную сумму, а в конце второго — на сумму, которая получилась в конце первого полугодия после начисления процентов). Сколько денег будет у Буратино в конце года в зависимости от n? Как ведёт себя эта величина при $n \to \infty$? (Это называется *непрерывное начисление процентов.*)

(Решение этой задачи и привело к открытию числа e.)

Определение 1. Числом e называется следующий предел:

$$e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Задача 5. Найти

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$$

Задача 6. Найти

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{m}{n}\right)^n$$

для любого целого m.

Задача 7. Положим по определению:

$$\exp a = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n.$$

Докажите, что $\exp a$ существует для всех вещественных a.

Задача 8. Докажите, что

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}.$$

(Напомним, что $0! = 1$ по определению.)

Задача 9. Докажите, что

$$\exp a = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!}.$$

Задача 10. (*) Докажите, что для любых вещественных a, b:

$$\exp(a + b) = \exp a \cdot \exp b.$$