

Совместный бакалавриат ВШЭ-РЭШ, 2019-20 уч. год**Математический анализ 1** (<http://math-info.hse.ru/s19/3>)**Семинар 3 (13 сентября 2019)***И. Щуров, М. Матушко, И. Машанова, И. Эрлих***Задача 1.** Сколько существует

- (а) любых;
- (б) взаимно-однозначных (биективных);
- (с) инъективных (не склеивающих точки)

отображений конечного множества X в конечное множество Y , если в X есть ровно n элементов, а в Y — ровно m элементов.

Задача 2. Сколько существует

- (а) любых;
- (б) k -элементных

подмножеств n -элементного множества?

Задача 3. Пусть последовательности a_n и b_n ограничены (ограниченны сверху, ограничены снизу). Рассмотрим последовательность c_n , заданную следующим образом:

- (а) $c_n = a_n + b_n$;
- (б) $c_n = a_n b_n$;
- (с) $c_n = a_n / b_n$.

Является ли последовательность c_n ограниченной (ограниченной сверху, ограниченной снизу)? Если да, докажите. Если нет, приведите контрпример.

Задача 4. Пусть a_n и b_n такие две последовательности, что

$$\exists k \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N}: b_n = a_{n+k}.$$

Докажите, что a_n ограничена тогда и только тогда, когда b_n ограничена.

Задача 5. Докажите, что для любого натурального n выполняется равенство

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Задача 6. Рассмотрим *неравенство Бернулли*: $(1+x)^n \geq 1+nx$ для всех $x \geq -1$ и $n \in \mathbb{N}$.

- (а) Докажите его, если ещё не доказали на лекции.
- (б) Найдите какое-нибудь $x < -1$, при котором неравенство Бернулли не выполняется для какого-нибудь n .
- (с) Найдите место в доказательстве, которое «ломается» при $x < -1$.
- (д) Верно ли неравенство Бернулли для $x = -2$?

Задача 7. Найдите ошибку в рассуждении:

Докажем, что в любой табуне все лошади одной масти. Воспользуемся индукцией по числу лошадей в табуне. Если в табуне всего одна лошадь, то, разумеется, все лошади в этой табуне одной масти. Предположим теперь, что в любой табуне из n лошадей все лошади одной масти. Рассмотрим произвольную табуну из $n + 1$ лошади. По предположению индукции любые n лошадей в этой табуне одной масти. Поэтому все лошади в табуне одной масти.

Задача 8. Есть детская пирамида с n кольцами и два пустых стержня той же высоты. Разрешается перекладывать верхнее кольцо с одного стержня на другой, но нельзя класть большее кольцо на меньшее. Докажите, что:

- (а) можно переложить все кольца на один из пустых стержней;
- (б) можно сделать это за $2^n - 1$ перекладываний.

Задача 9. Докажите свойства модуля: для всех $x, y, z \in \mathbb{R}$

- (а) $|xy| = |x| \cdot |y|$;
- (б) $|x + y| \leq |x| + |y|$;
- (с) $|x - y| \leq |x - z| + |z - y|$ (неравенство треугольника).

Задача 10. (*) Докажите, что из любой последовательности можно выбрать нестрого монотонную подпоследовательность.