Совместный бакалавриат ВШЭ-РЭШ, 2019-20 уч. год
Математический анализ 1 (http://math-info.hse.ru/s19/3)
Семинар 1 (6 сентября 2019)
И. Щуров, М. Матушко, И. Машанова, И. Эрлих

Задача 1. Доказать, что рациональные числа всюду плотны, то есть для любого интервала $(a; b)$, $b > a$, существует бесконечное количество рациональных чисел, принадлежащих этому интервалу.

Задача 2. Доказать, что иррациональные числа тоже всюду плотны.

Задача 3. Доказать, что квадратный корень из любого простого числа иррационален.

Задача 4. Может ли
- (a) сумма двух рациональных чисел быть иррациональным числом?
- (b) сумма рационального и иррационального — рациональным?
- (c) сумма двух иррациональных чисел — рациональным числом?
- (d) произведение двух иррациональных чисел — рациональным числом?

Задача 5. Доказать, что число $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ является иррациональным.

Задача 6. Доказать, что любое рациональное число задается бесконечной периодической десятичной дробью (быть может, с периодом (0)).

Задача 7. Чему равняется $1 - 0{,}(9)$?

Задача 8. Доказать, что любая бесконечная периодическая десятичная дробь задает рациональное число.

Задача 9. Представьте, что вы — древний грек. Что вы можете сказать о числе π? Как доказать, используя только геометрические рассуждения, что $\pi > 3$? Что $\pi < 4$? Можете ли вы доказать более точные оценки?

Задача 10. Пусть a и b – целые числа и $a = bq + r$, где q и r тоже целые числа. Докажите, что в этом случае НОД$(a, b) =$ НОД(b, r).

Задача 11. (Алгоритм Евклида) Пусть a и b — целые числа, не равные одновременно нулю, и последовательность чисел

$$a > b > r_1 > r_2 > r_3 > r_4 > \dots r_{n-1} > r_n > r_{n+1} = 0,$$

определена следующим образом: каждое r_k — это остаток от деления предпредыдущего числа на предыдущее, а r_{n-1} делится на r_n нацело.

Докажите, что НОД$(a, b) = r_n$

Задача 12. Найти наибольший общий делитель (НОД) для чисел
- (a) 6 и 15.

(b) 228 и 60.

Задача 13. Покрыть прямоугольник
(a) 6×15
(b) 228×60
одинаковыми квадратами с максимально возможной стороной.

Задача 14. (*) С помощью алгоритма Евклида доказать, что для любых натуральных чисел m и n найдутся такие целые числа s и t, что $sm + tn = \text{НОД}(m, n)$. Однозначным ли образом они определены?

Задача 15. С помощью предыдущей задачи доказать утверждение: если p и q взаимно просты, и при этом np делится на q, то n делится на q. (Все числа — целые.)

Задача 16. С помощью предыдущей задачи доказать единственность представления рационального числа в виде несократимой дроби. Иными словами, если $m/n = p/q$ и при этом m и n взаимно просты и p и q взаимно просты, то $m = p$ и $n = q$.

Дополнительные задачи

Задача 17. Рассмотрим функцию $f(x) = 1 + \frac{1}{1+x}$, $x > 0$. Показать, что если $f(x) = x$, то $x = \sqrt{2}$.

Рассмотрим последовательность чисел, которая строится по следующему закону. Первое число этой последовательности, обозначаемое x_0, равняется единице. Каждое следующее число получается в результате применения к предыдущему функции $f(x)$, определенной в предыдущей задаче. Иными словами, $x_{n+1} = f(x_n)$. (Говорят, что мы рассматриваем *итерации* функции f.) Оказывается, пределом этой последовательности (при $n \to \infty$) является число $\sqrt{2}$. Этот факт можно использовать для приближенного нахождения $\sqrt{2}$.

Задача 18. Вычислить первые 5 членов последовательности x_n.

Задача 19. Как модифицировать функцию f, чтобы новая последовательность стремилась к корню из данного числа?

Задача 20. Рассмотрим функцию $g(x) = \frac{1}{2}(x + \frac{2}{x})$, $x > 0$. Показать, что если $g(x) = x$, то $x = \sqrt{2}$.

Задача 21. Пусть последовательность y_n задается следующим образом: $y_0 = 1$, $y_{n+1} = g(y_n)$. Пределом такой последовательности является $\sqrt{2}$. Вычислить первые 5 элементов этой последовательности. Как вы считаете, какая из двух последовательностей (x_n или y_n) быстрее сходится к $\sqrt{2}$?

Задача 22. Как модифицировать функцию g, чтобы новая последовательность стремилась к корню из данного числа? (Полученная таким образом формула называется *итерационной формулой Герона.*)