Дискретная математика

Задания по теме «Графы» к семинарам №№ 5–7 (16 мая, 18 мая, 23 мая)

Определения, изоморфизм, связность

Задача 1. Неориентированный граф $G = (V, E)$ задан множеством своих вершин $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ и множеством своих ребер

$$E = \big\{\{v_2, v_3\}, \{v_2, v_4\}, \{v_2, v_5\}, \{v_3, v_4\}, \{v_3, v_5\}, \{v_4, v_5\}\big\}.$$

а) Есть ли в графе G петли?
б) Есть ли в графе G кратные ребра?
в) Есть ли в графе G изолированные вершины (то есть такие, которые не инцедентны ни одному ребру)? г) Является ли граф G простым?
д) Является ли граф G полным?
е) Найдите степени всех вершин графа G.
ж) Изобразите граф G на плоскости.
з) Задайте граф G матрицей смежности.
и) Задайте граф G матрицей инцидентности.
к) Есть ли в графе G циклы?
л) Найдите максимальную цепь графа G.

Задача 2. Сколько ребер в графе, задаваемом матрицей смежности A?

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Задача 3. Сколько ребер в графе с последовательностью степеней вершин (1, 2, 2, 2, 3, 3, 3)?

Задача 4. Существует ли простой граф в котором 100 вершин, причем каждая из них имеет степень 3?

Задача 5. Существует ли простой граф со следующим набором степеней вершин: $(2, 2, 2, 4, 5, 5)$? Ответ обосновать.

Задача 6. Показать, что в любом графе без петель и кратных ребер, содержащем не менее 2 вершин, найдутся 2 вершины с одинаковыми степенями.

Задача 7. Обозначим через $n_i(G)$ число вершин степени i в графе G. Построить все попарно неизоморфные графы без петель и кратных ребер, у которых:
а) $n_2(G) = 1$, $n_3(G) = n_4(G) = 2$ и $n_i(G) = 0$ при $i \neq 2, 3, 4$;
б) $n_2(G) = 3$, $n_3(G) = 2$, $n_4(G) = 1$ и $n_i(G) = 0$ при $i \neq 2, 3, 4$.

Задача 8. Изобразить все попарно неизоморфные 4-вершинные графы без петель и кратных ребер.

Задача 9. Сколько существует попарно неизоморфных 6-вершинных графов без петель и кратных ребер со следующим набором степеней вершин $(2, 2, 3, 3, 3, 5)$?

Задача 10. Сколько существует попарно неизоморфных, не имеющих петель и кратных ребер кубических графов с 6 вершинами? Есть ли среди них двудольные графы?

Задача 11. Построить все попарно неизоморфные орграфы (без петель и кратных дуг), содержащие:
а) 3 вершины и 3 дуги;
б) 3 вершины и 4 дуги;
в) 4 вершины и 3 дуги.
Сколько среди них сильно связных, односторонне связных и слабо связных?

Задача 12. Изобразить все попарно неизоморфные ориентированные псевдографы, содержащие:

а) 2 вершины и 2 дуги;

б) 2 вершины и 3 дуги;

в) 3 вершины и 2 дуги.

Сколько среди них сильно связных, односторонне связных и слабо связных?

Задача 13. Доказать, что если полустепень исхода каждой вершины ориентированного псевдографа положительна, то в нем существует ориентированный цикл (петля считается циклом длины 1).

Задача 14. Доказать, что в ориентированном мультиграфе без ориентированных циклов найдется вершина с нулевой полустепенью исхода.

Задача 15. Доказать, что в ориентированном мультиграфе без ориентированных циклов с n вершинами можно занумеровать все вершины натуральными числами из множества $\{1, 2, \ldots, n\}$ так, что каждая дуга направлена от вершины с меньшим номером к вершине с бóльшим.

Задача 16. Индукцией по n доказать, что связный псевдограф с n вершинами содержит не менее $n - 1$ ребер ($n \geq 1$).

Задача 17. Доказать, что если из связного мультиграфа удалить произвольное ребро, содержащееся в некотором цикле, то новый мультиграф будет также связным.

Задача 18. Показать, что если в мультиграфе степени всех вершин больше 1, то в нем есть цикл.

Задача 19. Пусть G — произвольный граф без петель и кратных ребер, а $\overline{G}$ — его дополнение. Доказать, что:

а) хотя бы один из графов G или $\overline{G}$ связен;

б) если в G более 4 вершин, то хотя бы в одном из графов G или $\overline{G}$ имеется цикл.

Задача 20. Выяснить, сколько существует попарно неизоморфных графов без петель и кратных ребер, имеющих:

а) 6 вершин и 11 ребер;

б) 7 вершин и 18 ребер;

в) 8 вершин и 24 ребер;

г) 6 вершин, 7 ребер и 2 компоненты связности;

д) 8 вершин и удовлетворяющих следующему условию: сумма степеней всех вершин не менее 53.

Задача 21. Найти количество попарно неизоморфных графов, содержащих:

а) 9 вершин и 32 ребра;

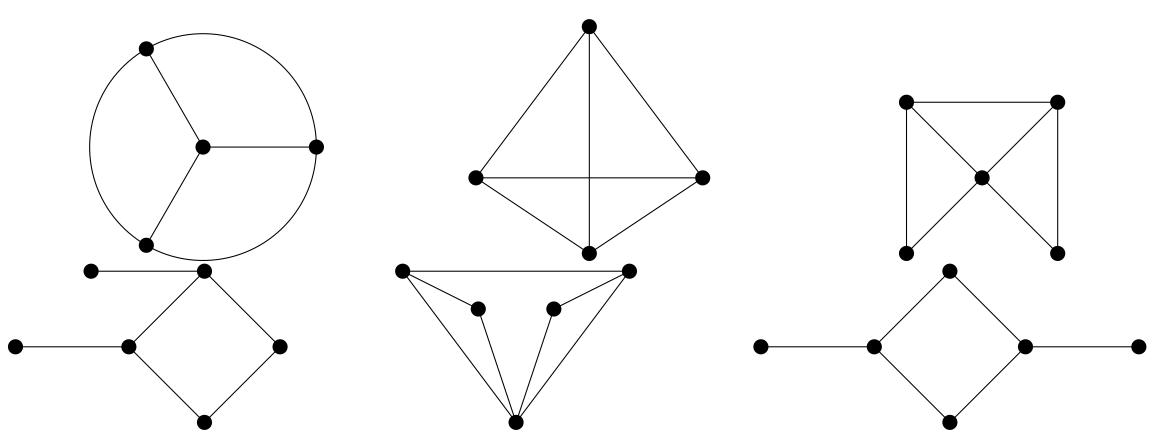
б) 20 вершин и 16 ребер, причем степень каждой вершины не превосходит 2.

Задача 22. Найти количество попарно неизоморфных графов со следующим набором степеней вершин:

а) $(10; 10; 10; 10; 10; 10; 9; 9; 8; 8; 8)$;

б) $(11; 11; 4; 4; 4; 4; 3; 3; 3; 3; 2)$.

Задача 23. Найти пары изоморфных графов среди следующих. Для всех пар неизоморфных графов доказать, что они неизоморфны.



Задача 24. Изобразить два неизоморфных графа с набором степеней вершин $(1, 1, 2, 2, 3, 3, 4)$.

Задача 25. Верно ли, что два графа изоморфны если

а) у них по 10 вершин, степень каждой из которых равна 9;

б) у них по 8 вершин, степень каждой из которых равна 3;

в) они связаны, без циклов и содержат по 6 ребер?

Задача 26. Выяснить, какие пары графов на картинках (ссылки отдельно) являются изоморфными, а какие нет. Если графы изоморфны, привести изморфизм, если нет, объяснить почему.

Задача 27. Пусть графы G и H не имеют петель и кратных ребер, являются двусвязными, содержат по 6 вершин и 8 ребер. Пусть, кроме того, граф G имеет ровно 2 вершины степени 2, а граф H — ровно 4 вершины степени 3. Изоморфны ли графы G и H?

Задача 28. В простом графе 10 вершин.

а) Какое минимальное и максимальное число компонент связности в этом графе?

б) Какое минимальное и максимальное число ребер в этом графе?

в) В графе 3 компоненты связности. Какое минимальное и максимальное число ребер в этом графе?

г) В графе 5 компонент связности. Какое минимальное и максимальное число ребер в этом графе?

д) В графе 40 ребер. Какое число компонент связности может быть в этом графе?

е) В графе 30 ребер. Какое число компонент связности может быть в этом графе?

Важно! Не надо искать готовую формулу (она есть, мы её разберём на ближайших занятиях).

Задача 29. Привести пример графа с набором степеней вершин $(1, 1, 2, 3, 3, 3, 3, 3, 5)$ и одной компонентой связности? Двумя компонентами связности? Какое максимальное число компонент связности может быть в графе с таким набором степеней вершин?

Задача 30. В простом графе с 40 вершинами и 50 ребрами степень каждой вершины равна 2 или 3. Найти количество вершин степени 2.

Задача 31. Каждый из 17 ученых переписывается с каждым из остальных на каком-то одном из трех языков. Докажите, что найдутся трое ученых, переписывающиеся друг с другом на одном языке.

Задача 32. В стране Миллениум некоторые города связаны между собой авиалиниями. Из столицы выходит 2017 авиалиний, из города Тьма-Таракань — одна, а из всех остальных городов — ровно по 2018 авиалиний. Можно ли из Тьмы-Таракани добраться в столицу?

Задача 33. Расстояние между вершинами u и v в графе G равно 6, а между вершинами v и w — 4. Какое может быть расстояние между вершинами u и w?

Задача 34. Построить Вконтакте "Интерактивный граф друзей" (для обсуждения задачи лучше сохранить изображение графа).

а) Сколько компонент связности, содержащих более одной вершины, в этом графе?

б) Рассмотрим компоненту связности (без главного героя, он(а) уехал(а) на прекрасный необитаемый остров без интернета), содержащую максимальное число вершин/друзей. Пусть каждый пользователь раз в день смотрит свою ленту и делает репост интересной новости (будем считать, что если человек запостил новость, то те, кто прочитали новость от него, делают репост на следующий день). За какое минимальное и максимальное число дней новость узнают все друзья из этой группы?

с) В графе явно видны отдельные группы. По какому принципу они строятся? (Вопрос для обсуждения.)

Деревья

Задача 35. В простом связном графе 10 вершин, степень каждой вершины равна 3. Сколько ребер надо удалить из графа, чтобы оставшийся граф был деревом, содержащим исходные 10 вершин?

Задача 36. Пусть G — связный граф без петель и кратных ребер. Доказать, что при добавлении любого нового ребра, соединяющего две вершины графа G, в полученном графе будет цикл.

Задача 37. Доказать, что граф без петель и кратных ребер, имеющий n вершин и m ребер, содержит не менее $n - m$ связных компонент, причем если в этом графе нет циклов, то он содержит ровно $n - m$ связных компонент.

Задача 38. Пусть G — граф без петель и кратных ребер, имеющий n вершин и m ребер. Доказать, что тогда из каждого из нижеперечисленных условий вытекает последующее условие:

а) граф G является деревом;

б) любые две вершины графа G связаны ровно одной простой цепью;

в) граф G не содержит циклов и $m = n - 1$;

г) граф G связен и $m = n - 1$;

д) граф G связен, но при удалении любого ребра становится несвязным;

е) граф G не содержит циклов, но при добавлении любого нового ребра, соединяющего две вершины графа G, в полученном графе появляется цикл;

ж) граф G является деревом.

Задача 39. Найти количество неизоморфных остовных деревьев для полного графа с 5 вершинами .

Задача 40. Доказать, что во всяком дереве с $n \geq 2$ вершинами содержится не менее 2 висячих вершин.

Задача 41. Доказать, что любое дерево с $n \geq 2$ вершинами является двудольным графом. Какие деревья являются полными двудольными графами?