Совместный бакалавриат ВШЭ-РЭШ, 2018-19 уч. год
Математический анализ 1 (http://math-info.hse.ru/s18/i)
Семинар 15 (20 декабря 2018)
И. Щуров, М. Матушко, И. Машанова, И. Эрлих

Некоторые задачи основаны на учебнике Stewart, Calculus (Early Transcedentals)

Задача 1. Найти площадь, ограниченную кривыми.

(a) $y = x^2$, $y^2 = x$.
(b) $y = \sqrt{x}$, $y = x/4$.
(c) $x = 1 - y^2$, $x = y^2 - 1$.
(d) $y = 0$, $y = \frac{2}{x^2+1}$.

Задача 2. При каких значениях $\alpha \in \mathbb{R}$ интеграл сходится? Найти значение интеграла для всех тех значений α, для которых он сходится.

(a) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha}$
(b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$
(c) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{x^\alpha}$
(d) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{x^\alpha}$

Задача 3. Найти значение несобственного интеграла, если интеграл сходится.

(a) $\displaystyle\int_{-2}^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$
(b) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{dx}{x\sqrt{x}}$
(c) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x^2+1}$
(d) $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{x^2-1}$
(e) $\displaystyle\int_1^\infty xe^{-x^2}\,dx$
(f) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\ln x}{x}dx$
(g) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{x^2\,dx}{9+x^6}$
(h) $\displaystyle\int_{-3}^3 \frac{dx}{x^3-x}$
(i) $\displaystyle\int_{-1}^0 \frac{e^{1/x}}{x^3}dx$
(j) $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{1/x}}{x^3}dx$
(k) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)}$
(l) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{x(\cos x+1)}{e^{x^2}}dx$

Задача 4. При каких значениях $\alpha \in \mathbb{R}$ ряд

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^\alpha}$$

сходится?

Задача 5. Сходится ли ряд? Если да, найти его сумму.

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{k^2}{k^2-1}$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+2^n}{3^n}$

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+2)}{(n+3)^2}$

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} \exp(-2n+3)$

(e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2-1}$

(f) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n}{n+1}$

Задача 6. Найти значение p, при котором ряд сходится

(a) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p}$

(b) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n^p}$