Совместный бакалавриат ВШЭ-РЭШ, 2018-19 уч. год
Математический анализ 1 (http://math-info.hse.ru/s18/i)
Семинар 14 (13 декабря 2018)
И. Щуров, М. Матушко, И. Машанова, И. Эрлих

Некоторые задачи основаны на учебнике Stewart, Calculus (Early Transcedentals)

Задача 1. Найти предел

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin\sin\sin\sin\sin(x + x^{2018}\sin x) - x}{x^3 + x^{2018}\sin x}.$$

Задача 2. Найти неопределённые интегралы с помощью подходящей замены переменных (не забудьте вернуться к исходнй переменной; и константу не забудьте):

(a) $\displaystyle\int x^2 \sin x^3\, dx$

(b) $\displaystyle\int (3x-4)^{2018}\, dx$

(c) $\displaystyle\int \frac{x\, dx}{x^2+1}$

(d) $\displaystyle\int \frac{x\, dx}{(x^2+1)^2}$

(e) $\displaystyle\int e^x \sin e^x\, dx$

(f) $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x} dx$

(g) $\displaystyle\int \frac{1+x}{1+x^2} dx$

(h) $\displaystyle\int \frac{\cos x}{\sin^2 x} dx$

(i) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2} dx$

Задача 3. Найти определенные интегралы

(a) $\displaystyle\int_0^2 (x-1)^{25}\, dx$

(b) $\displaystyle\int_0^1 x^2(1+2x^3)^5\, dx$

(c) $\displaystyle\int_0^7 \sqrt{4+3x}\, dx$

(d) $\displaystyle\int_1^2 \frac{e^{1/x}}{x^2}\, dx$

(e) $\displaystyle\int_1^2 x\sqrt{x-1} dx$

(f) $\displaystyle\int_e^{e^4} \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$

Задача 4. Докажите, что для положительных a, b, верно равенство

$$\int_0^1 x^a(1-x)^b\, dx = \int_0^1 x^b(1-x)^a\, dx.$$

Задача 5. Функция f называется *периодической*, если существует такое $T > 0$, что $f(x+T) = f(x)$ для всех $x \in \mathbb{R}$. Докажите, что

$$\int_a^{a+T} f(x)\, dx = \int_b^{b+T} f(x)\, dx$$

для любых a, b. (Иными словами, интеграл от периодической функции по периоду не зависит от выбора отрезка интегрирования.)

Задача 6. Найти интеграл с помощью интегрирования по частям и других методов

(a) $\int x^2 \sin \pi x \, dx$

(b) $\int \ln(2x+1) \, dx$

(c) $\int (\ln x)^2 \, dx$

(d) $\int_1^2 \frac{\ln x}{x^2} \, dx$

(e) $\int_0^\pi x^3 \cos x \, dx$

(f) $\int_0^1 (x^2+1)e^{-x} \, dx$

(g) $\int_1^2 x^4 (\ln x)^2 \, dx$

(h) $\int \cos \sqrt{x} \, dx$

(i) $\int x \ln(1+x) \, dx$

(j) (*) $\int e^x \sin x \, dx$

Задача 7. Найти интеграл

(a) $\int \frac{x^2}{x+4} dx$

(b) $\int \frac{dt}{(t+4)(t-1)}$

(c) $\int_3^4 \frac{x^3-2x^2-4}{x^3-2x^2} dx$

(d) $\int \frac{dx}{(x-1)(x^2+9)}$

(e) $\int \frac{dx}{x(x^2+4)^2}$

(f) $\int_0^1 \frac{x \, dx}{x^2+4x+13}$