

**Совместный бакалавриат ВШЭ-РЭШ, 2018-19 уч. год****Математический анализ 1** (<http://math-info.hse.ru/s18/i>)**Семинар 14 (13 декабря 2018)**

И. Щуров, М. Матушко, И. Машанова, И. Эрлих

*Некоторые задачи основаны на учебнике Stewart, Calculus (Early Transcendentals)***Задача 1.** Найти предел

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \sin \sin \sin \sin(x + x^{2018} \sin x) - x}{x^3 + x^{2018} \sin x}.$$

**Задача 2.** Найти неопределённые интегралы с помощью подходящей замены переменных (не забудьте вернуться к исходной переменной; и константу не забудьте):

(a)  $\int x^2 \sin x^3 dx$

(e)  $\int e^x \sin e^x dx$

(b)  $\int (3x - 4)^{2018} dx$

(f)  $\int \frac{\ln x}{x} dx$

(c)  $\int \frac{x dx}{x^2 + 1}$

(g)  $\int \frac{1+x}{1+x^2} dx$

(d)  $\int \frac{x dx}{(x^2 + 1)^2}$

(h)  $\int \frac{\cos x}{\sin^2 x} dx$

(i)  $\int \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2} dx$

**Задача 3.** Найти определённые интегралы

(a)  $\int_0^2 (x-1)^{25} dx$

(d)  $\int_1^2 \frac{e^{1/x}}{x^2} dx$

(b)  $\int_0^1 x^2(1+2x^3)^5 dx$

(e)  $\int_1^2 x\sqrt{x-1} dx$

(c)  $\int_0^7 \sqrt{4+3x} dx$

(f)  $\int_e^{e^4} \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$

**Задача 4.** Докажите, что для положительных  $a, b$ , верно равенство

$$\int_0^1 x^a(1-x)^b dx = \int_0^1 x^b(1-x)^a dx.$$

**Задача 5.** Функция  $f$  называется *периодической*, если существует такое  $T > 0$ , что  $f(x+T) = f(x)$  для всех  $x \in \mathbb{R}$ . Докажите, что

$$\int_a^{a+T} f(x) dx = \int_b^{b+T} f(x) dx$$

для любых  $a, b$ . (Иными словами, интеграл от периодической функции по периоду не зависит от выбора отрезка интегрирования.)**Задача 6.** Найти интеграл с помощью интегрирования по частям и других методов

(a)  $\int x^2 \sin \pi x dx$

(b)  $\int \ln(2x + 1) dx$

(c)  $\int (\ln x)^2 dx$

(d)  $\int_1^2 \frac{\ln x}{x^2} dx$

(e)  $\int_0^{\pi} x^3 \cos x dx$

(f)  $\int_0^1 (x^2 + 1)e^{-x} dx$

(g)  $\int_1^2 x^4 (\ln x)^2 dx$

(h)  $\int \cos \sqrt{x} dx$

(i)  $\int x \ln(1 + x) dx$

(j) (\*)  $\int e^x \sin x dx$

**Задача 7.** Найти интеграл

(a)  $\int \frac{x^2}{x+4} dx$

(b)  $\int \frac{dt}{(t+4)(t-1)}$

(c)  $\int_3^4 \frac{x^3 - 2x^2 - 4}{x^3 - 2x^2} dx$

(d)  $\int \frac{dx}{(x-1)(x^2+9)}$

(e)  $\int \frac{dx}{x(x^2+4)^2}$

(f)  $\int_0^1 \frac{x dx}{x^2 + 4x + 13}$