Совместный бакалавриат ВШЭ-РЭШ, 2018-19 уч. год
Математический анализ 1 (http://math-info.hse.ru/s18/i)
Семинар 13 (6 декабря 2018)
И. Щуров, М. Матушко, И. Машанова, И. Эрлих

Определение 1. Рассмотрим отрезок $[a, b]$, $b > a$. Отметим на нём $(n-1)$ различную точку. Эти точки разобьют отрезок $[a, b]$ на n отрезочков поменьше. Обозначим эти отрезочки через I_k, $k = 1, \dots, n$. Выберем на каждом отрезке I_k по какой-то точке $x_k \in I_k$. Набор отрезков I_k вместе с набором отмеченных на них точек x_k называется *размеченным разбиением* отрезка $[a, b]$.

Для данного размеченного разбиения обозначим длину отрезка I_k через Δx_k.

Определение 2. *Диаметром* разбиения Π называется длина самого длинного отрезка, входящего в это разбиение:

$$d(\Pi) := \max_{k=1,\dots,n} \Delta x_k.$$

Определение 3. *Интегральной суммой* для функции f и размеченного разбиения Π называется сумма

$$S_\Pi(f) = \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x_k,$$

где x_k и Δx_k в правой части соответствуют разбиению Π.

Определение 4. *Определенным интегралом* от функции f по отрезку $[a, b]$, $b > a$, называется такое число I (если оно существует), что для всякого $\varepsilon > 0$ существует такая $\delta > 0$, что для любого размеченного разбиения Π отрезка $[a, b]$, диаметр которого меньше δ, интегральная сумма $S_\Pi(f)$ находится на расстоянии меньше ε от I, то есть

$$|S_\Pi(f) - I| < \varepsilon.$$

Определенный интеграл от функции f по отрезку $[a, b]$ обозначается через

$$\int_a^b f(x)dx.$$

Неформально можно записать

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{d(\Pi)\to 0} S_\Pi(f).$$

Теорема 1. *Если функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$, интеграл от неё по этому отрезку существует.*

Задача 2. Найдите определенные интегралы, пользуясь определением. Поскольку подыинтегральные функции непрерывны, интеграл существует, и значит достаточно найти предел интегральных сумм для какой-нибудь последовательности разбиений со стремящимися к нулю диаметрами. Проще всего использовать разбиение на отрезки одинаковой длины, а в качестве отмеченных точек брать концы отрезков.

(a) $\int_{-1}^{2} 3\,dx$; (b) $\int_{1}^{3} x\,dx$; (c) $\int_{0}^{1} e^x\,dx$.

Задача 3. (*) Докажите по индукции, что

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Пользуясь этим равенством, вычислите по определению

$$\int_0^1 x^2\,dx.$$

Задача 4. Пользуясь определением докажите следующие свойства определенного интеграла. Все равенства верны в предположении существования всех интегралов, участвующих в равенстве.

(a) $\int_a^b (f(x)+g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$

(b) $\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx, \quad c = \text{const}.$

(c) Если $\int_a^b f(x)dx$ существует, то f ограничена на $[a,b]$.

(d) Если $f(x) \le g(x)$ для всех $x \in [a,b]$, то $\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx.$

(e) $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx.$

Задача 5. Пользуясь геометрической интерпретацией определённого интеграла как площади найти следующие интегралы.

(a) $\int_0^2 \sqrt{4-x^2}\,dx$; (b) $\int_a^b x\,dx$; (c) $\int_{-3}^{3} x^2 e^{-x^2} \sin x\,dx$.

Определение 5. Пусть функция f непрерывна на отрезке $[a,b]$. Её *первообразной* называется такая функция F, непрерывная на $[a,b]$ и дифференцируемая на (a,b), что $F'(x) = f(x)$ для всех $x \in (a,b)$.

Теорема 6. *(Формула Ньютона — Лейбница) Пусть функция f непрерывна на отрезке $[a,b]$. Тогда*

1. *Пусть $G(x) = \int_a^x f(\xi)d\xi$. Тогда G — первообразная f.*
2. *$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$, где F —какая-нибудь первообразная f.*

Задача 7. С помощью формулы Ньютона — Лейбница найти следующие интегралы, если они существуют.

(a) $\int_0^1 (2x + 4x^3)\, dx$;

(b) $\int_1^t \frac{2\, dx}{x}$;

(c) $\int_0^4 \sqrt{x}\, dx$;

(d) $\int_{-1}^2 \frac{1}{x^2}\, dx$;

(e) $\int_0^\pi (\sin x + \cos x)\, dx$;

(f) $\int_{\ln 2}^{\ln 3} (e^x + e^{-x})\, dx$.

Задача 8. Пусть

$$G(x) = \int_0^{\sqrt{x}} e^{-t^2} dt.$$

Найти $G'(x)$.

Задача 9. Докажите, что

(a) $\int_1^{100} e^{-x^2} dx < \frac{99}{e}$;

(b) $\int_0^1 e^x \sin x\, dx < 2$;

(c) $\int_1^{100} e^{-x^2} dx < \frac{1}{e}$.