Совместный бакалавриат ВШЭ-РЭШ, 2018-19 уч. год
Математический анализ 1 (http://math-info.hse.ru/s18/i)
Семинар 12 (29 ноября 2018)
И. Щуров, М. Матушко, И. Машанова, И. Эрлих

Задача 1. Для каких неотрицательных целых n выполнено, что:
(a) $\sin x = o(x^n)$ при $x \to 0$;
(b) $\sin x = x + o(x^n)$ при $x \to 0$;
(c) $e^{-x} = o(x^n)$ при $x \to +\infty$;
(d) $e^x = o(x^n)$ при $x \to +\infty$?

Задача 2. Найти разложения следующих функций по целым неотрицательным степеням переменной x до степени n включительно (то есть остаток должен быть $o(x^n)$ при $x \to 0$):
(a) $\sin(\sin x)$, $n = 3$
(b) $\ln(\cos x)$, $n = 6$
(c) $\sqrt{1 - 2x + x^3} - \sqrt[3]{1 - 3x + x^2}$, $n = 2$

Задача 3. Вычислить пределы:

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{2x} - 1 - \sin 2x}{\cos x - 1}$;

(b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{\cos x - 1}$;

(c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x + \operatorname{tg} x}{x^3}$;

(d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x - x\cos x}{x^3}$;

(e) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x) - x}{\sin(x^2)}$;

(f) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{1 + \frac{1}{x}}$.

(g) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(2x^2 - x^3)}{\ln\cos x}$;

(h) $\lim\limits_{x\to -\infty} xe^x$;

(i) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1 - x + \ln x}{1 + \cos \pi x}$;

(j) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^a - 1}{x^b - 1}$;

(k) $\lim\limits_{x\to \pi/2} \dfrac{\cos(\cos(x)) - 1}{\sin(\sin(x) - 1)}$.

Задача 4. Дана функция

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

(a) Докажите, что функция $f(x)$ является бесконечно дифференцируемой на всей числовой прямой.
(b) Вычислите все полиномы Тейлора для $f(x)$ при $x \to 0$.
(c) Для каких x справедливо соотношение $T_n(x) \to f(x)$ при $n \to \infty$?

Задача 5. С помощью формулы Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа вычислите без использования компьютера
(a) $\ln(3/2)$ с точностью до сотых;
(b) $e^{1/4}$ с точностью до тысячных
и докажите оценку на погрешность.