Совместный бакалавриат ВШЭ-РЭШ, 2018-19 уч. год
Математический анализ 1 (http://math-info.hse.ru/s18/i)
Семинар 11 (22 ноября 2018)
И. Щуров, М. Матушко, И. Машанова, И. Эрлих

Определение 1. Функция называется выпуклой вниз (вверх), если любая хорда лежит над (под) графиком функции.

Задача 1. Пусть функция f всюда определа, выпукла вниз и для некоторых двух точек $x_2 > x_1$, $f(x_2) > f(x_1)$. Докажите, что функция возрастает на луче $[x_2, +\infty)$. Пользоваться производными нельзя: никто не сказал, что они существуют во всех точках.

Задача 2. Найти промежутки выпуклости и точки перегиба. Построить график функции.

(a) $\dfrac{x^3}{|x|}$;
(b) $x^3 + x$;
(c) $x^3 - x^2 - x + 1$;
(d) $\sin 2x - x$;
(e) $\dfrac{x+1}{x-1} + 2x$;
(f) e^{x-x^2}.

Задача 3. Пользуясь при необходимости правилом Лопиталя найдите предел

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin\sin x}{x}$;
(b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x+1}$;
(c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x}{x^2}$;
(d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos(x) - 1}{x^2}$;
(e) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x}$;
(f) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln x}{x}$.

Задача 4. Пусть $f(x) = o(x)$ и $g(x) = o(x^2)$ при $x \to 0$. Верно ли, что обязательно
(a) $g(x) = o(x)$;
(b) $f(x) + g(x) = o(x)$;
(c) $f(x) + g(x) = o(x^2)$;
(d) $f(x)g(x) = o(x^3)$;
(e) $xf(x) = o(x^2)$;
(f) $\frac{g(x)}{f(x)} = o(x)$;
(g) $cf(x) = o(x)$ для любой константы c;
(h) $h(x)f(x) = o(x)$ для любой функции h, ограниченной в некоторой окрестности точки $x = 0$;
(i) $g'(x) = o(x)$?

Задача 5. При каких условиях на n и m верно, что $x^n = o(x^m)$ при

(a) $x \to 0$
(b) $x \to 1$
(c) $x \to \infty$

Определение 2. Рядом Тейлора для функции f в точке x_0 называется ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n,$$

где $f^{(n)}$ — это n-я производная f, $f^{(0)} = f$.

Задача 6. Найти ряды Тейлора в заданной точке x_0 для функций

(a) $x^3 - 3x^2 + 3x + 1$, $x_0 = 4$;
(b) e^{2x}, $x_0 = 0$;
(c) $\sin x$, $x_0 = 0$;
(d) $\cos x$, $x_0 = 0$;
(e) $\ln x$, $x_0 = 1$;
(f) $\frac{1}{1-x}$, $x_0 = 0$.

Задача 7. (*) Пусть функция f выпукла вниз. Докажите, что она непрерывна в любой точке.