

**Совместный бакалавриат ВШЭ-РЭШ, 2018-19 уч. год****Математический анализ 1** (<http://math-info.hse.ru/s18/i>)**Семинар 11 (22 ноября 2018)***И. Щуров, М. Матушко, И. Машанова, И. Эрлих*

**Определение 1.** Функция называется выпуклой вниз (вверх), если любая хорда лежит над (под) графиком функции.

**Задача 1.** Пусть функция  $f$  всюду определена, выпукла вниз и для некоторых двух точек  $x_2 > x_1$ ,  $f(x_2) > f(x_1)$ . Докажите, что функция возрастает на луче  $[x_2, +\infty)$ . Пользоваться производными нельзя: никто не сказал, что они существуют во всех точках.

**Задача 2.** Найти промежутки выпуклости и точки перегиба. Построить график функции.

- |                         |                           |                              |
|-------------------------|---------------------------|------------------------------|
| (a) $\frac{x^3}{ x }$ ; | (c) $x^3 - x^2 - x + 1$ ; | (e) $\frac{x+1}{x-1} + 2x$ ; |
| (b) $x^3 + x$ ;         | (d) $\sin 2x - x$ ;       | (f) $e^{x-x^2}$ .            |

**Задача 3.** Пользуясь при необходимости правилом Лопиталья найдите предел

- |  |  |  |
|--|--|--|
| (a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \sin x}{x}$ ; | (c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{x^2}$ ;      | (e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}$ ;     |
| (b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x+1}$ ;    | (d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - 1}{x^2}$ ; | (f) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x}$ . |

**Задача 4.** Пусть  $f(x) = o(x)$  и  $g(x) = o(x^2)$  при  $x \rightarrow 0$ . Верно ли, что обязательно

- (a)  $g(x) = o(x)$ ;
- (b)  $f(x) + g(x) = o(x)$ ;
- (c)  $f(x) + g(x) = o(x^2)$ ;
- (d)  $f(x)g(x) = o(x^3)$ ;
- (e)  $xf(x) = o(x^2)$ ;
- (f)  $\frac{g(x)}{f(x)} = o(x)$ ;
- (g)  $cf(x) = o(x)$  для любой константы  $c$ ;
- (h)  $h(x)f(x) = o(x)$  для любой функции  $h$ , ограниченной в некоторой окрестности точки  $x = 0$ ;
- (i)  $g'(x) = o(x)$ ?

**Задача 5.** При каких условиях на  $n$  и  $m$  верно, что  $x^n = o(x^m)$  при

- |                       |                       |                            |
|-----------------------|-----------------------|----------------------------|
| (a) $x \rightarrow 0$ | (b) $x \rightarrow 1$ | (c) $x \rightarrow \infty$ |
|-----------------------|-----------------------|----------------------------|

**Определение 2.** рядом Тейлора для функции  $f$  в точке  $x_0$  называется ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n,$$

где  $f^{(n)}$  — это  $n$ -я производная  $f$ ,  $f^{(0)} = f$ .

**Задача 6.** Найти ряды Тейлора в заданной точке  $x_0$  для функций

(a)  $x^3 - 3x^2 + 3x + 1, x_0 = 4;$

(b)  $e^{2x}, x_0 = 0;$

(c)  $\sin x, x_0 = 0;$

(d)  $\cos x, x_0 = 0;$

(e)  $\ln x, x_0 = 1;$

(f)  $\frac{1}{1-x}, x_0 = 0.$

**Задача 7.** (\*) Пусть функция  $f$  выпукла вниз. Докажите, что она непрерывна в любой точке.