Совместный бакалавриат ВШЭ-РЭШ, 2018-19 уч. год
Математический анализ 1 (http://math-info.hse.ru/s18/i)
Семинар 10 (15 ноября 2018)
И. Щуров, М. Матушко, И. Машанова, И. Эрлих

Теорема 1. *Пусть функция f определена на отрезке $[a, b]$, непрерывна и обратима. Тогда обратная функция f^{-1} также непрерывна в своей области определения.*

Доказательство. (Набросок доказательства с лекции.) Возьмём произвольную точку $x_0 \in (a, b)$. Пусть $y_0 = f(x_0)$. Докажем, что f^{-1} непрерывна в y_0. Для этого нужно доказать, что для всякого $\varepsilon > 0$ найдётся такая $\delta > 0$, что для любого y, если $0 < |y - y_0| < \delta$, то $|f^{-1}(y) - x_0| < \varepsilon$. Возьмём в качестве δ минимум из двух чисел $|f(x_0 + \varepsilon) - f(x_0)|$ и $|f(x_0 - \varepsilon) - f(x_0)|$. Обратимая функция монотонна. Из соображений монотонности ясно, что данная δ удовлетворяет требованиям, поскольку для такой δ интервал $(y_0 - \delta, y_0 + \delta)$ лежит внутри интервала $(f(x_0 - \varepsilon), f(x_0 + \varepsilon))$ (или $(f(x_0 + \varepsilon), f(x_0 - \varepsilon))$) и значит $f^{-1}(y)$ лежит внутри интервала $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ для любого $y \in (y_0 - \delta, y_0 + \delta)$. □

Задача 2. Указать, в каком месте приведенное доказательство теоремы 1 «ломается» при нарушении условия непрерывности функции f, а именно, для функции

(a) $f(x) = \begin{cases} x - 1, & x \le 0 \\ x + 1, & x > 0 \end{cases}$ (b) $f(x) = \begin{cases} x - 1, & x < 0 \\ 1 - x, & x \in [0, 2] \end{cases}$

в точке $x_0 = 0$.

Теорема 3. *Пусть функция f определена на отрезке $[a, b]$, непрерывна на этом отрезке и обратима. Пусть она дифференцируема в точке $x_0 \in (a, b)$ и $f'(x_0) \neq 0$. Тогда обратная функция f^{-1} дифференцируема в точке $y_0 = f(x_0)$ и её производная равна*

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$$

Задача 4. С помощью теоремы о производной обратной функции найдите производные следующих функций

(a) $\sqrt{x}$; (c) $\ln x$; (e) $\arccos x$;
(b) $\sqrt[3]{x}$; (d) $\arcsin x$; (f) $\operatorname{arctg} x$.

Задача 5. Пользуясь равенством $a^x = e^{x \ln a}$ найти производную функции

(a) a^x; (b) x^x; (c) $x^{(x^x)}$.

Задача 6. Найдите производные
(a) $\log_5 x$;
(b) $\operatorname{arctg} \sqrt{|2x|}$;

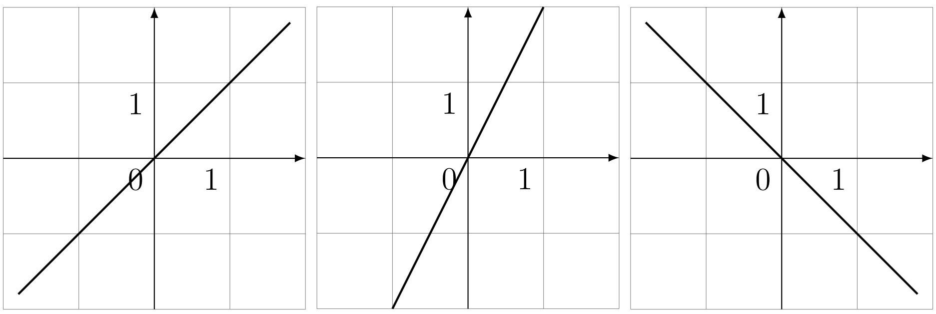
(c) $e^{4\ln x}$;
(d) $e^{f(x)}$, если производная $f(x)$ известна;
(e) $\ln f(x)$, если производная $f(x)$ известна;
(f) $(\log_3 x)^{x^2+3}$.

Задача 7. Укажите и классифицируйте точки разрыва. Найдите локальные и глобальные максимумы и минимумы, промежутки монотонности, асимптоты для следующих функций. Нарисуйте эскизы графиков.

(a) $f(x) = \ln x + \frac{x^2}{2} - 6x$; (b) $f(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}$; (c) $f(x) = \ln(1+e^{-x})$.

Задача 8. Часто при графическом изображении зависимостей используют *логарифмические шкалы*, то есть по осям откладывают не сами значения величин, а их логарифмы. Логарифмическая шкала удобна, если интересующая нас величина меняется «на порядки» — например, зарплата конкретного человека может составлять 10 тыс. рублей в месяц, может 100 тыс. рублей, а может и десятки миллионов руб. При этом мы хотели бы на графике отразить разницу как между 10 тыс. и 100 тыс., так и между 100 тыс. и десятком миллионов. Если взять обычную линейную шкалу и отмасштабировать её таким образом, чтобы на графике уместились точки, соответствующуие ста миллионам, то разница между 10 и 100 тысячами станет невидимой глазу. Логарифмическая шкала позволяет справиться с этой проблемой.

Рассмотрим графики



Записать зависимость формулой и нарисовать график в обычных осях (x, y), если
(a) вертикальная ось является логарифмической (то есть по вертикали откладывается $\ln y$), а горизонтальная — обычной;
(b) вертикальная ось является обычной, а горизонтальная — логарфимической;
(c) обе оси являются логарифмическими.