Совместный бакалавриат ВШЭ-РЭШ, 2018-19 уч. год
Математический анализ 1 (http://math-info.hse.ru/s18/i)
Семинар 9 (8 ноября 2018)

И. Щуров, М. Матушко, И. Машанова, И. Эрлих

Задача 1. Пусть $f'(x) = 0$ при всех $x \in (a, b)$. Докажите, что функция $f(x)$ является постоянной на (a, b).

Задача 2. Пусть $f(x)$ дифференцируема на (a, b). Докажите с помощью теоремы Лагранжа, что $f(x)$ неубывает на (a, b) если и только если $f'(x) \geqslant 0$ при всех $x \in (a, b)$.

Замечание 1. *На лекции было доказано следующее утверждение: если функция дифференцируема на интервале и её производная положительна во всех его точках, то она строго возрастает на этом интервале. Утверждение задачи 2 отличается от утверждения с лекции в нескольких аспектах: это критерий (если и только если), возрастание заменено на неубывание, положительность производной —на неотрицательность.*

Задача 3. Пусть $f(x)$ дифференцируема на (a, b). Докажите с помощью теоремы Лагранжа, что $f(x)$ строго возрастает на (a, b) если и только если $f'(x) \geqslant 0$ при всех $x \in (a, b)$ и $f'(x)$ не обращается тождественно в 0 ни на каком отрезке, лежащем внутри (a, b).

Теорема 4. *Пусть функции f и g дифференцируемы в точке x. Тогда*

1. $(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$.
2. $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$.
3. $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g(x)^2}$ *(если $g(x) \neq 0$).*

Теорема 5. *Пусть f дифференцируема в точке x_0 и g дифференциурема в точке $y_0 = f(x_0)$. Тогда*

$$g(f(x))' = g'(f(x))f'(x).$$

Задача 6. Найти производные следующих функций и укажите их область определения:

(a) $\dfrac{\sin x}{2\cos x + 3}$;

(b) $x^2 e^x$;

(c) $\dfrac{x^3 + 2x^2 + x}{x^2 - 1}$;

(d) $\sin \sqrt[3]{1 + x^2}$

(e) e^{x^2}

(f) $\begin{cases} \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

(g) $\begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

(h) $\begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

Задача 7. Рассмотрим функцию

$$f(x) = \frac{x}{10} + x^2 \sin \frac{1}{x}, \quad f(0) = 0.$$

Докажите, что $f'(0) > 0$, но при этом не существует такой окрестности точки 0, что в этой окрестности функция f возрастает.

Задача 8. Найдите локальные и глобальные максимумы и минимумы, промежутки монотонности, асимптоты для следующих функций. Нарисуйте эскизы графиков.

(a) $x^3 - x^2 - x + 1$;

(b) $\sin 2x - x$;

(c) $\dfrac{x+1}{x-1} + 2x$;

(d) $f(x) = 2 + \dfrac{1}{x^2+2x+2}$;

(e) $f(x) = \dfrac{x^2}{x+2}$;

(f) $f(x) = e^{x-x^2}$.

Задача 9. Дана парабола — график функции $y = x^2$. Выясните, из каких точек плоскости к ней можно провести:

(a) Одну касательную?

(b) Две касательных?

(c) Ни одной касательной?

Задача 10. (*) Рассмотрим зеркало в форме параболы $y = x^2$. Докажите, что пучок лучей, параллельных оси $0y$, отразившись от зеркала, собирается в одной точке (фокусе параболы). Найдите эту точку.