Совместный бакалавриат ВШЭ-РЭШ, 2018-19 уч. год
Математический анализ 1 (http://math-info.hse.ru/s18/i)
Семинар 7 (18 октября 2018)
И. Щуров, М. Матушко, И. Машанова, И. Эрлих

Задача 1. (*) Доказать непрерывность функции $f(x) = e^x$ во всех точках.

Указание. Представить $e^x = e^{x_0}e^{x-x_0}$, затем доказать, что $\lim_{x\to x_0} e^{x-x_0} = 1$. Для последнего представить e^x как $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}$.

Задача 2. (*) Доказать непрерывность функции $f(x) = \sin x$ во всех точках.

Указание. Использовать формулу для разности синусов.

Задача 3. Доказать непрерывность функции $f(x) = \sqrt{x}$ для всех $x \geq 0$.

Задача 4. Сформулировать с помощью кванторов, что означает $\lim_{x\to\infty} f(x) = +\infty$.

Задача 5. (*) Доказать *первый замечательный предел*:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$$

Указание. Докажите из геометрических соображений, что $\sin x \leq x$ и $\operatorname{tg} x \geq x$. Отсюда следует, что

$$\cos x \leq \frac{\sin x}{x} \leq 1.$$

Задача 6. Какими нужно выбрать значения параметров a и b, чтобы следующая функция была непрерывной?

$$f(x) = \begin{cases} e^x, & x < 0 \\ ax + b, & 0 \leq x \leq 2 \\ x^2 - 3, & x > 2. \end{cases}$$

Задача 7. Найти естественную область определения функции, заданной формулой. (То есть множество всех x, при которых выражение, заданное формулой, определено.) Является ли функция ограниченной? Найти все точки разрывов, установить их тип (скачок, устранимый разрыв, полюс, существенный разрыв). Существуют ли такие точки, что функцию можно в этой точке до- или переопределить и сделать таким образом непрерывной в этой точке? Найти все вертикальные, горизонтальные и наклонные асимптоты.

(a) $\dfrac{x+2}{x^2-1}$

(b) $\dfrac{x^2-1}{x-4}$

(c) $\dfrac{x^2-1}{x-1}$

(d) $\dfrac{2x^2-1}{x^2-4}$

(e) $\sqrt{x^2-1}$

(f) $\sqrt{\dfrac{x^4-1}{x+1}}$

(g) $\dfrac{\sin x}{x}$

(h) $\dfrac{1}{\sin\frac{1}{x}}$

(i) $\dfrac{\sin\frac{1}{x}}{x}$

(j) $x\sin\dfrac{1}{x}$

(k) $x+\sin x$

(l) $x+\dfrac{\sin x}{x}$

(m) $\exp\dfrac{1}{x}$

(n) $\exp\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)$

(o) $\begin{cases}1, & x\in\mathbb{Q}\\ 0, & x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$

(p) $\begin{cases}x, & x\in\mathbb{Q}\\ 0, & x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$

(q) $\dfrac{|x|}{x}$

(r) $\dfrac{x^3+3^x}{x^2+2^x}$

(s) $\dfrac{x^2-2^x}{x^2+3^x}$

Теорема 8. *Пусть f непрерывна на отрезке $[a,b]$ (в концах отрезка требуется односторонняя непрерывность) и $f(a)f(b)<0$ (то есть в концах отрезка функция принимает разные знаки). В этом случае существует точка $c\in(a,b)$, являющаяся корнем функции f, то есть $f(c)=0$.*

Задача 9. Докажите, *теорему о промежуточном значении*: если функция f непрерывна на отрезке $[a,b]$, то для любого $y_0\in[f(a),f(b)]$ (или $y_0\in[f(b),f(a)]$) существует такое $x_0\in[a,b]$, что $f(x_0)=y_0$.

Задача 10. Докажите, что уравнение имеет решение. Сколько решений оно имеет? (Здесь требуется использовать непрерывность корня третьей степени и логарифма. Мы этого не доказывали, но поверьте на слово: они непрерывны.)

(a) $x=\cos x$; (b) $\ln x=3-2x$; (c) $\sqrt[3]{x}=1-x$.

Задача 11. Турист начал восхождение на гору в 7 утра. Он заночевал на вершине горы. На следующий день в 7 утра он начал спускаться с горы, и к вечеру вернулся на базу, с которой начинал путь. Докажите, что было такое время (например, 2 часа 58 минут 9 секунд), в которое он был на одной и той же высоте в первый и во второй день.