

Совместный бакалавриат ВШЭ-РЭШ, 2018-19 уч. год**Математический анализ 1** (<http://math-info.hse.ru/s18/i>)**Семинар 6 (11 октября 2018)**

И. Щуров, М. Матушко, И. Машанова, И. Эрлих

Определение 1. Проколотой ε -окрестностью точки a называется множество

$$\mathring{U}_\varepsilon(a) = (a - \varepsilon, a) \cup (a, a + \varepsilon).$$

Его можно также задать как

$$\mathring{U}_\varepsilon(a) = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < |x - a| < \varepsilon\}.$$

Определение 2. Пусть функция f определена в некоторой проколотой окрестности точки a . Говорят, что *предел функции f при x стремящемся к a равен b* , если выполняется следующее:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in \mathring{U}_\delta(a): |f(x) - b| < \varepsilon.$$

Другая запись:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x: 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon.$$

Замечание. Во всех задачах полезно рисовать графики функций или их эскизы.**Задача 1.** Пользуясь определением доказать следующие утверждения:

(a) $\lim_{x \rightarrow 2} 42 = 42;$

(b) $\lim_{x \rightarrow 3} x = 3;$

(c) $\lim_{x \rightarrow -1} 4x = -4;$

(d) $\lim_{x \rightarrow 5} x^2 = 25;$

(e) $\lim_{x \rightarrow 3} x^2 \neq 7;$

(f) $\lim_{x \rightarrow 2} x^3 = 8;$

(g) $\lim_{x \rightarrow 0} |2x| = 0;$

(h) $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + x - 6) = 0;$

(i) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x - 6}{x - 2} = 5;$

(j) $\lim_{x \rightarrow 4} \sqrt{x} = 2;$

(k) $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{1}{x} = \frac{1}{7}.$

Задача 2. Существует ли предел функции

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

при $x \rightarrow 0$?**Задача 3.** Найти предел функции

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \neq 2 \\ 3, & x = 2 \end{cases}$$

при $x \rightarrow 2$, если он существует.

Задача 4. Найти предел функции Дирихле

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

при $x \rightarrow \sqrt{2}$, если он существует.

Задача 5. Найти предел

(a) $\lim_{x \rightarrow 0} \cos \frac{2\pi}{x},$

(b) $\lim_{x \rightarrow 0} x \cos \frac{2\pi}{x}$

если он существует.

Задача 6. Доказать утверждения арифметики пределов: если существует $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ и $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$, то

(a) $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x);$

(b) $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x);$

(c) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}$ при условии, что $\lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0$.

(d) $\lim_{x \rightarrow a} \sqrt{f(x)} = \sqrt{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}$ при условии, что $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \geq 0$.

Задача 7. Пользуясь арифметикой пределов найти пределы

(a) $\lim_{x \rightarrow 2} (x^4 + 3x^2 - x + 1);$

(e) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(2+h)^3 - 8}{h};$

(b) $\lim_{t \rightarrow -1} (t^2 + 1)^3 (t + 3)^5;$

(f) $\lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t^2 + t} \right);$

(c) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(4+h)^2 - 16}{h};$

(g) $\lim_{x \rightarrow -4} \frac{\sqrt{x^2 + 9} - 5}{x + 4}.$

(d) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x + 2}{x^3 + 8};$

Задача 8. Придумать и доказать теорему о двух милиционерах для пределов функций.

Задача 9. С помощью теоремы о двух милиционерах доказать, что

$$\lim_{x \rightarrow 0} (x^2 + 5x) \sin \frac{1}{x^2} = 0.$$