Совместный бакалавриат ВШЭ-РЭШ, 2018-19 уч. год
Математический анализ 1 (http://math-info.hse.ru/s18/i)
Семинар 6 (11 октября 2018)
И. Щуров, М. Матушко, И. Машанова, И. Эрлих

Определение 1. *Проколотой ε-окрестностью* точки a называется множество

$$\mathring{U}_\varepsilon(a) = (a-\varepsilon, a) \cup (a, a+\varepsilon).$$

Его можно также задать как

$$\mathring{U}_\varepsilon(a) = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < |x-a| < \varepsilon\}.$$

Определение 2. Пусть функция f определена в некоторой проколотой окрестности точки a. Говорят, что *предел функции f при x стремящемся к a равен b*, если выполняется следующее:

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0\, \forall x \in \mathring{U}_\varepsilon(a) \colon |f(x) - b| < \varepsilon.$$

Другая запись:

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0\, \forall x \colon 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon.$$

Замечание. *Во всех задачах полезно рисовать графики функций или их эскизы.*

Задача 1. Пользуясь определением доказать следующие утверждения:

(a) $\lim\limits_{x\to 2} 42 = 42$;

(b) $\lim\limits_{x\to 3} x = 3$;

(c) $\lim\limits_{x\to -1} 4x = -4$;

(d) $\lim\limits_{x\to 5} x^2 = 25$;

(e) $\lim\limits_{x\to 3} x^2 \neq 7$;

(f) $\lim\limits_{x\to 2} x^3 = 8$;

(g) $\lim\limits_{x\to 0} |2x| = 0$;

(h) $\lim\limits_{x\to 2} (x^2 + x - 6) = 0$;

(i) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2 + x - 6}{x-2} = 5$;

(j) $\lim\limits_{x\to 4} \sqrt{x} = 2$;

(k) $\lim\limits_{x\to 7} \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{7}$.

Задача 2. Существует ли предел функции

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

при $x \to 0$?

Задача 3. Найти предел функции

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \neq 2 \\ 3, & x = 2 \end{cases}$$

при $x \to 2$, если он существует.

Задача 4. Найти предел функции Дирихле

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

при $x \to \sqrt{2}$, если он существует.

Задача 5. Найти предел

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \cos \dfrac{2\pi}{x}$, (b) $\lim\limits_{x\to 0} x \cos \dfrac{2\pi}{x}$

если он существует.

Задача 6. Доказать утверждения арифметики пределов: если существует $\lim_{x\to a} f(x)$ и $\lim_{x\to a} g(x)$, то

(a) $\lim\limits_{x\to a}(f(x) + g(x)) = \lim\limits_{x\to a} f(x) + \lim\limits_{x\to a} g(x)$;
(b) $\lim\limits_{x\to a}(f(x) \cdot g(x)) = \lim\limits_{x\to a} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to a} g(x)$;
(c) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$ при условии, что $\lim_{x\to a} g(x) \neq 0$.
(d) $\lim\limits_{x\to a} \sqrt{f(x)} = \sqrt{\lim\limits_{x\to a} f(x)}$ при условии, что $\lim_{x\to a} f(x) \geq 0$.

Задача 7. Пользуясь арифметикой пределов найти пределы

(a) $\lim\limits_{x\to 2}(x^4 + 3x^2 - x + 1)$;
(b) $\lim\limits_{t\to -1}(t^2 + 1)^3(t + 3)^5$;
(c) $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(4 + h)^2 - 16}{h}$;
(d) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x + 2}{x^3 + 8}$;
(e) $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(2 + h)^3 - 8}{h}$;
(f) $\lim\limits_{t\to 0} \left(\dfrac{1}{t} - \dfrac{1}{t^2 + t}\right)$;
(g) $\lim\limits_{x\to -4} \dfrac{\sqrt{x^2 + 9} - 5}{x + 4}$.

Задача 8. Придумать и доказать теорему о двух миллиционерах для пределов функций.

Задача 9. С помощью теоремы о двух миллиционерах доказать, что

$$\lim_{x\to 0}(x^2 + 5x) \sin \frac{1}{x^2} = 0.$$