

**Совместный бакалавриат ВШЭ-РЭШ, 2018-19 уч. год****Математический анализ 1** (<http://math-info.hse.ru/s18/i>)**Семинар 5 (4 октября 2018)***И. Щуров, М. Матушко, И. Машанова, И. Эрлих*

**Определение 1.** Обозначим число способов выбрать  $k$  различных элементов из множества, содержащего  $n$  различных элементов, через  $C_n^k$ . Оно называется *биномиальным коэффициентом*. Также часто обозначается через  $\binom{n}{k}$  (здесь нет опечатки — при таком обозначении  $n$  пишется сверху, а  $k$  снизу).

На лекции было показано, что

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Для целых  $n, k$  обычно по определению полагают, что  $C_n^k = 0$  при  $k < 0$  или  $k > n$ .

**Задача 1.** Докажите тождества, пользуясь комбинаторными соображениями:

(a)  $C_n^k = C_n^{n-k}$

(b)  $C_{n+1}^k = C_n^{k-1} + C_n^k$

(c)  $\sum_{k=0}^n C_n^k = 2^n$

**Задача 2.** Докажите формулу бинома Ньютона:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n a^k b^{n-k} C_n^k.$$

**Задача 3.** Докажите, что для любого натурального  $n > 2$ ,

(a)  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} < 2;$

(b)  $2 < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 3.$

**Задача 4.** Пусть  $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ . Докажите, что

(a)  $a_{n+1} > a_n$  для всех  $n$ .

(b) Существует предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ .

**Определение 2.** Предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

обозначается буквой  $e$ . Мы показали, что  $e$  существует и находится на интервале  $(2, 3)$ . На самом деле,  $e$  — иррациональное число, десятичная запись которого начинается с 2,718281828...

**Задача 5.** Буратино положил 1000 рублей на банковский счёт под 100% годовых. Проценты по счёту начисляются через равные промежутки времени  $n$  раз в год. Например, если  $n = 1$ , то проценты будут начислены один раз в конце года, если  $n = 2$ , то два раза — в середине и конце года (каждый раз будет начислено 0,5%) и т.д. Проценты начисляются с капитализацией (например, если  $n = 2$ , то в конце первого полугодия будут начислены проценты на исходную сумму, а в конце второго — на сумму, которая получилась в конце первого полугодия после начисления процентов). Сколько денег будет у Буратино в конце года в зависимости от  $n$ ? Как ведёт себя эта величина при  $n \rightarrow \infty$ ? (Это называется *непрерывное начисление процентов*.)

(Решение этой задачи и привело к открытию числа  $e$ .)

**Задача 6.** Найти

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$$

**Задача 7.** Найти

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{m}{n}\right)^n$$

для любого целого  $m$ .

**Задача 8.** Положим по определению:

$$\exp a = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n.$$

Докажите, что  $\exp a$  существует для всех вещественных  $a$ .

**Задача 9.** Докажите, что

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}.$$

(Напомним, что  $0! = 1$  по определению.)

**Задача 10.** Докажите, что

$$\exp a = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!}.$$

**Задача 11.** Докажите, что для любых вещественных  $a, b$ :

$$\exp(a + b) = \exp a \cdot \exp b.$$