Совместный бакалавриат ВШЭ-РЭШ, 2018-19 уч. год
Математический анализ 1 (http://math-info.hse.ru/s18/i)
Семинар 4 (26 сентября 2018)
И. Щуров, М. Матушко, И. Машанова, И. Эрлих

Осталось с прошлого семинара

Задача 1. Рассмотрим последовательность $a_n = \frac{n^2}{2^n}$. Пусть $b_n = a_{n+1}/a_n$.

(a) Докажите, что найдётся такое $N \in \mathbb{N}$ и такое $c < 1$, что для всех $n > N$, $b_n < c$.

(b) Докажите, что найдётся такое $N \in \mathbb{N}$ и такое M, что для всех $n > N$, $a_n < Mc^n$. (Подсказка: $a_n = a_1 \cdot b_1 \cdot \ldots \cdot b_{n-1}$.)

(c) Докажите, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Задача 2. (*) Для любой последовательности a_n рассмотрим последовательность ее средних арифметических $b_n = \frac{a_1 + \ldots + a_n}{n}$.

(a) Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Докажите, что $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = a$.

(b) Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = a$. Верно ли, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$?

Логарифм и линейная функция

Задача 3. Докажите, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log_2 n}{n} = 0.$$

Подсказка: пусть k — такое натуральное число, что $2^k < n \le 2^{k+1}$. (Такое k обязательно найдётся, потому что $2^k \to +\infty$ при $k \to \infty$.) Докажите, что в этом случае $\frac{\log_2 n}{n} \le \frac{k+1}{2^k}$.

Арифметика пределов

Теорема 4. *Пусть* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$, $\lim_{n\to\infty} b_n = B$, $A, B \in \mathbb{R}$. *Тогда*

1. $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = A + B$;
2. $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = A \cdot B$;
3. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = \frac{1}{A}$ *если* $A \neq 0$;

Начиная с этого момента этими правилами можно пользоваться, если не оговорено обратное.

Задача 5. Докажите, что $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{A}{B}$ при $B \neq 0$.

Задача 6. Докажите, что если существует $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A \geq 0$, то

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{A}.$$

Задача 7. Найдите пределы. При использовании правил арифметики пределов требуется обосновать их применимость на каждом шаге.

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{\dfrac{n+1}{n-1}}$;

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^n+n}{\sqrt{n}-2^n\ln n}$;

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n^2-2^{-n}}{n^2-4n+3}$;

(d) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n\ln n+2}{n^2-n+1}$.

(e) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sin(2^n+3^n)}{n}$;

(f) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2-1}$;

(g) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^n+3^{-n}}{3^n-2^{-n}}$;

(h) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sin n+n^3-2^{-n}}{2^n+3}$;

(i) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n^5+5}}{n-1}$;

(j) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n^2-3}-\sqrt{n^2+n}}{\sqrt{n^2-5}-\sqrt{n^2-n}}$;

(k) $\lim\limits_{n\to\infty} e^{1/n}$;

(l) $\lim\limits_{n\to\infty} \sin n$;

(m) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln n}{\sqrt{n}+1}$.

Задача 8. Пусть $P_k(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_kx^k$ и $Q_m(x) = b_0 + b_1x + \ldots + b_mx^m$ — многочлены степени k и m соответственно, $a_k \neq 0$ и $b_m \neq 0$. Найдите

$$\lim_{n\to\infty} \frac{P_k(n)}{Q_m(n)}.$$

Суммы и ряды

Рассмотрим последовательность $\{a_n\}$. Сумма $a_1 + a_2 + \ldots + a_k$ кратко обозначается следующим образом:

$$\sum_{i=1}^{k} a_i.$$

Например,

$$\sum_{i=1}^{3} \frac{1}{i} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}.$$

Рассмотрим теперь последовательность s_k:

$$s_k = \sum_{i=1}^{k} a_i.$$

Если существует $\lim\limits_{k\to\infty} s_k$, его обозначают через

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i = a_1 + a_2 + \ldots$$

Задача 9. Рассмотрим геометрическую прогрессию $b_n = cq^{n-1}$.

(a) Докажите, что

$$\sum_{i=1}^{n} b_n = c\frac{q^n - 1}{q - 1}$$

(b) Докажите, что при $|q| < 1$

$$\sum_{i=1}^{\infty} b_n = c\frac{1}{1 - q}$$

Разное

Задача 10. Приведите примеры последовательностей $\{x_n\}$, $\{y_n\}$, $\{z_n\}$, для которых:

(a) x_n не имеет предела, а x_{2^n} имеет;
(b) x_n и y_n не имеют пределов, а $x_n \cdot y_n$ имеет;
(c) $x_n < y_n < z_n$, причем x_n и z_n имеют пределы, а y_n не имеет.

Задача 11. Пусть известно, что

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$.

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Что вы можете сказать о $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{a_n}$?

Задача 12. Пусть известно, что

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

Верно ли, что для любой последовательности $\{b_n\}$

$$\lim_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = 0?$$

Если нет, то для каких последовательностей $\{b_n\}$ это точно верно?

Задача 13. Пусть известно, что

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A, \quad \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty, \quad A \in \mathbb{R}$.
(b) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty, \quad \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty$.
(c) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty, \quad \lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty$.
(d) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty, \quad \lim\limits_{n\to\infty} b_n = -\infty$.
(e) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty, \quad \lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty$.

Что можно сказать о $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n)$? О $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n/b_n)$? Приведите необходимые примеры и доказательства.