Совместный бакалавриат ВШЭ-РЭШ, 2018-19 уч. год
Математический анализ 1 (http://math-info.hse.ru/s18/i)
Семинар 2 (20 сентября 2018)
И. Щуров, М. Матушко, И. Машанова, И. Эрлих

Задача 1. На лекции было доказано неравенство Бернулли $(1+x)^n \geq 1+nx$ для всех $x > 0$ и $n \in \mathbb{N}$. Доказательство было проведено по индукции, база индукции $(1+x)^1 \geq 1+1\cdot x$, индуктивный переход $(1+x)^{n+1} = (1+x)^n(1+x) \geq (1+nx)(1+x) = 1+(n+1)x+nx^2 \geq 1+(n+1)x$. На самом деле это доказательство работает для всех $x \geq -1$.

(a) Найдите какое-нибудь $x < -1$, при котором неравенство Бернулли не выполняется для какого-нибудь n.
(b) Найдите место в доказательстве, которое «ломается» при $x < -1$.
(c) Верно ли неравенство Бернулли для $x = -2$?

Задача 2. Докажите свойства модуля: для всех $x, y, z \in \mathbb{R}$

(a) $|xy| = |x| \cdot |y|$
(b) $|x+y| \leq |x| + |y|$;
(c) $|x-y| \leq |x-z| + |z-y|$ (неравенство треугольника);

Задача 3. Является ли последовательность ограниченной, монотонной (возрастающей, убывающей, невозрастающей, неубывающей)? Вычислите предел, если он существует. Если последовательность стремится к ∞, $+\infty$, $-\infty$, укажите это. В каждом случае, когда предел существует, укажите номер N, который соответствует $\varepsilon = 1/8$ из определения предела.

(a) $a_n = 1000^n$ при $n < 3000$, $a_n = \frac{1}{n}$ при $n \geq 3000$;
(b) $a_n = 10^{-n}$ при $n = 3k$ (для какого-то целого k), $a_n = \frac{1000}{n}$ при $n \neq 3k$ (для всех k);
(c) $a_n = 2^{-n}$ при $n \neq 3^k$ для всех целых k, $a_n = n$ при $n = 3^k$ для какого-то k.
(d) $a_n = 2^n$ для простых n и $a_n = \sqrt{n}$ для составных n.

Задача 4. Пусть a — некоторое вещественное число. Приведите пример последовательности $\{a_n\}$, у которой:

(a) Есть предел, равный числу a.
(b) Есть предел равный a, но ни один из членов последовательности не равен a,
(c) Есть предел равный a, при этом бесконечно много членов последовательности равны a и бесконечно много членов последовательности не равны a. Придумайте, как записать такое утверждение при помощи кванторов.
(d) Число a не является пределом последовательности, при этом бесконечно много членов последовательности равны a.
(e) Последовательность является неограниченной, но при этом её предел не равен ∞.
(f) Предел равен ∞, но при этом не равен $+\infty$.
(g) Предел равен $-\infty$, но при этом не равен ∞.

Задача 5. Объясните, что означают следующие утверждения. Приведите пример последовательности, которая удовлетворяет указанному утверждению, и последовательности, которая ему не удовлетворяет. Что вы можете сказать про предел последовательности, которая удовлетворяет утверждению? Найдите все пары утверждений, которые являются отрицаниями друг к другу.

(a) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n > N : |a_n - a| < \varepsilon;$
(b) $\exists \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n > N : |a_n - a| < \varepsilon;$
(c) $\exists \varepsilon > 0 \quad \forall N \in \mathbb{N} \quad \exists n > N : |a_n - a| \geq \varepsilon;$
(d) $\forall \varepsilon > 0 \quad \forall N \in \mathbb{N} \quad \forall n > N : |a_n - a| < \varepsilon;$
(e) $\exists \varepsilon > 0 \quad \forall N \in \mathbb{N} \quad \forall n > N : |a_n - a| \geq \varepsilon;$
(f) $\forall \varepsilon > 0 \quad \forall N \in \mathbb{N} \quad \exists n > N : |a_n - a| \geq \varepsilon.$
(g) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \exists n > N : |a_n - a| < \varepsilon;$

Задача 6. Угадайте предел последовательности, пользуясь любыми разумными соображениями, и докажите, что это действительно предел последовательности, пользуясь определением.

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n};$ (d) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^n}{3^n};$ (g) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sin 2^n}{n};$

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2-1};$ (e) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^{n+5}}{3^n};$ (h) $\lim\limits_{n\to\infty} \sin\frac{1}{n};$

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}};$ (f) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n^2}{n^2+4n+3};$ (i) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n} - \sqrt{n-1};$

Задача 7. Рассмотрим последовательность $a_n = q^n$, где $q \in \mathbb{R}$. При каких значениях q

(a) последовательность имеет предел? (Какой?)
(b) не имеет конечного предела и стремится к $+\infty$?
(c) не имеет конечного предела и стремится к ∞, но не к $+\infty$?
(d) не имеет конечного предела и при этом не стремится к ∞?

Все утверждения обосновать с помощью определения предела.

Задача 8. Рассмотрим последовательность $a_n = \frac{n^2}{2^n}$. Пусть $b_n = a_{n+1}/a_n$.

(a) Докажите, что найдётся такое $N \in \mathbb{N}$ и такое $c < 1$, что для всех $n > N$, $b_n < c$.
(b) Докажите, что найдётся такое $N \in \mathbb{N}$ и такое M, что для всех $n > N$, $a_n < Mc^n$. (Подсказка: $a_n = a_1 \cdot b_1 \cdot \ldots \cdot b_{n-1}$.)
(c) Докажите, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Задача 9. Для любой последовательности a_n рассмотрим последовательность ее средних арифметических $b_n = \frac{a_1 + \ldots + a_n}{n}$.

(a) Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Докажите, что $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = a$.
(b) Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = a$. Верно ли, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$?