Совместный бакалавриат ВШЭ-РЭШ, 2018-19 уч. год
Математический анализ 1 (http://math-info.hse.ru/s18/i)
Семинар 2 (12-14 сентября 2018)
И. Щуров, М. Матушко, И. Машанова, И. Эрлих

Задача 1. Пусть A и B — некоторые высказывания. Докажите, что если истинно высказывание $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$, то высказывания A и B или одновременно истинны, или одновременно ложны. (В этом случае говорят, что они являются *эквивалентными*, пишут $A \Leftrightarrow B$.)

Задача 2. Докажите, что высказывание $((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$ всегда истинно.

Задача 3. Даны следующие утверждения и предикаты ($x, y \in \mathbb{R}$):

- A: Все кошки серые;
- $B(x)$: $x + 5 = 10$;
- $C(x, y)$: $x^2 \leq y$;
- $E(x, y)$: $x^2 + y^2 = 0$.

Среди следующих утверждений укажите истинные:

(a) A;
(b) $B(5)$;
(c) $C(x, -1)$;
(d) $A \vee B(5)$;
(e) $A \wedge B(5)$;
(f) $A \Rightarrow B(5)$;
(g) $A \Rightarrow B(10)$;
(h) $\neg C(3, 4)$;
(i) $\forall x \in \mathbb{R}\colon B(x)$;
(j) $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R}\colon C(x, y)$;
(k) $\exists y \in \mathbb{R}\ \forall x \in \mathbb{R}\colon C(x, y)$;
(l) $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R}\colon\ \neg C(x, y)$;
(m) $\forall x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{R}\colon B(x) \Rightarrow A$;
(n) $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R}\colon B(x) \Rightarrow E(x, y)$;
(o) $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R}\colon B(x) \Rightarrow E(x, y)$;
(p) $\exists x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R}\colon B(x) \Rightarrow E(x, y)$;
(q) $\exists x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R}\colon B(x) \wedge E(x, y)$;
(r) $\forall x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{R}\colon C(x, y) \Rightarrow E(x, y)$;
(s) $\forall x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{R}\colon E(x, y) \Rightarrow C(x, y)$?

Задача 4. Пусть $x, y, z \in \mathbb{R}$. Какие из следующих утверждений верны?

(a) $\forall x\ \forall y\ \exists z\colon xy^2 < z$.
(b) $\forall x\ \forall z\ \exists y\colon xy^2 \leq z$.
(c) $\exists z\ \forall x\ \exists y\colon xy^2 = z$.
(d) $\forall z\ \exists x\ \forall y\colon xy^2 \leq z$.

Задача 5. Записать отрицание к утверждению, не используя знак отрицания. Что верно: утверждение или его отрицание?

(a) $\forall x\colon x^2 > 0$.
(b) $\forall x\ \exists y\colon x^2 > y^2$.
(c) $\exists x\colon x^2 < 0$.
(d) $\exists x\ \forall y\colon xy > 0$.

Задача 6. Записать отрицания ко всем утверждениям из задачи 4, не используя знак отрицания.

Задача 7. Какие из следующих утверждений верны?

(a) $\forall x \in \mathbb{R}\colon x > 2 \Rightarrow |x| > 2$.
(b) $\forall x \in \mathbb{R}\colon x < 2 \Rightarrow |x| < 2$.
(c) $\forall x \in \mathbb{R}\colon |x-3| < 1 \Rightarrow |x| < 4$.
(d) $\forall x \in \mathbb{R}\colon |x-3| > 1 \Rightarrow |x| > 4$.
(e) $\forall x\ \forall y\ \exists z\colon (y > x) \Rightarrow (y > z) \land (z > x)$.
(f) $\forall \varepsilon\ \forall x\colon |x-3| < \varepsilon \Rightarrow |x^2-9| < 10\varepsilon$.
(g) $\forall \varepsilon\ \forall x\colon |x-3| < \min(\varepsilon, 1) \Rightarrow |x^2-9| < 10\varepsilon$.
(h) (*) $\forall \varepsilon\ \exists \delta\ \forall x\colon (\delta > 0) \land ((|x-3| < \delta) \land (\varepsilon > 0) \Rightarrow |x^2-9| < \varepsilon)$.

Задача 8. Запишите с помощью кванторов следующие утверждения про натуральные числа n и m:

(a) n делится на m,
(b) n нечётно,
(c) n является простым числом,
(d) n и m взаимно просты.

Разрешено использовать только следующие объекты и операции:

- числа;
- переменные (в т.ч. не перечисленные в условии, если необходимо),
- проверку включения элемента во множество $\in$,
- множества вещественных, рациональных, целых и натуральных чисел,
- арифметические операции: только сложение и умножение,
- сравнение двух чисел: операции $=$ и $>$.
- логические операции: конъюнкция, дизъюнкция, отрицание (не должно стоять перед кванторами), импликация.

Задача 9. Пусть последовательности $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ ограничены. Рассмотрим последовательность $\{c_n\}$, заданную следующим образом:

(a) $c_n = a_n + b_n$; (b) $c_n = a_n b_n$; (c) $c_n = a_n / b_n$.

Является ли последовательность $\{c_n\}$ ограниченой? Если да, докажите. Если нет, приведите контрпример.