**Факультет компьютерных наук, 2018/19 уч. год**
**Дифференциальные уравнения** (http://math-info.hse.ru/s18/t)
**Семинар 18. Отображение Пуанкаре. Подкова Смейла (4.06)**
*И. В. Щуров, А. А. Айзенберг, И. С. Шилин, М. И. Ронжина*

# Предельные множества

Мы будем рассматривать векторные поля в $\mathbb{R}^n$, обладающие компактной *поглощающей областью* $U$, то есть такой областью, в которую фазовые кривые могут только входить и которую они никогда не могут покинуть.

Рассмотрим автономное дифференциальное уравнение

$$\dot{x} = v(x) \tag{1}$$

с поглощающей областью $U$. Пусть $x = \varphi(t; x_0)$ —решение с начальным условием $\varphi(0; x_0) = x_0$.

**Определение 1.** Пусть $x_0 \in U$. Назовём *ω-предельным множеством* точки $x_0$ (обозначается $\omega(x_0)$) множество, определенное следующим образом:

$$\omega(x_0) = \{x \in U \mid \exists \{t_k\}, t_k \to +\infty, \varphi(t_k; x_0) \to x\}.$$

**Задача 1.** Докажите, что омега-предельное множество любой точки замнкуто (то есть содержит все свои предельные точки).

**Задача 2.** Какими могут быть омега-предельные множества для дифференциальных уравнений на прямой?

**Задача 3.** Верно ли, что для любой точки $y \in \omega(x)$, $\omega(y) = \omega(x)$?

**Задача 4.** Найти отображение Пуанкаре для предельного цикла системы

$$\dot{x} = y + x(1 - x^2 - y^2), \quad \dot{y} = -x + y(1 - x^2 - y^2)$$

с отрезка $I = \{(x, 0) \mid x \in [1/2, 3/2]\}$ на себя.

**Задача 5.** Пусть неподвижная точка отображения Пуанкаре, соответствующая предельному циклу, является гиперболической, то есть производная отображения Пуанкаре в этой точке не равна 1. Докажите, что при малых возмущениях системы предельный цикл сохраняется.

# Подкова Смейла

Рассмотрим замкнутый квадрат $X = [0, 1]^2$ и следующие замкнутые полосы: вертикальные $\Pi'_0 = [1/5, 2/5] \times [0, 1]$ и $\Pi'_1 = [3/5, 4/5] \times [0, 1]$ и горизонтальные $\Pi_0 = [0, 1] \times [1/5, 2/5]$ и $\Pi_1 = [0, 1] \times [3/5, 4/5]$. Определим отображение $h\colon \Pi_0 \cap \Pi_1 \to X$ следующим образом: каждая из горизонтальных полос $\Pi_0$, $\Pi_1$ сжимается в пять раз по горизонтали, растягивается в пять раз по вертикали и параллельным переносом накладывается на соответствующую вертикальную полосу: $\Pi_0$ на $\Pi'_0$ и $\Pi_1$ на $\Pi'_1$. В точках квадрата, не лежащих в $\Pi_0$ или $\Pi_1$, отображение $h$ не определено.

Обозначим через $\Lambda$ множество точек $x$, для которых определено $h^n(x)$ для всех $n \in \mathbb{Z}$. Здесь $h^n$ — композиционная степень $h$.

**Определение 2.** *Отображением подковы* назовём ограничение $h$ на $\Lambda$.

**Задача 6.** Найдите неподвижные точки $h$.

**Задача 7.** Опишите точки, которые стремятся к неподвижным точкам как в будущем, так и в прошлом. Такие точки называют *гомоклиническими*.