Факультет компьютерных наук, 2018/19 уч. год
Дифференциальные уравнения (http://math-info.hse.ru/s18/t)
Семинар 18. Отображение Пуанкаре. Подкова Смейла (4.06)
И. В. Щуров, А. А. Айзенберг, И. С. Шилин, М. И. Ронжина

Предельные множества

Мы будем рассматривать векторные поля в $\mathbb{R}^n$, обладающие компактной *поглощающей областью* U, то есть такой областью, в которую фазовые кривые могут только входить и которую они никогда не могут покинуть.

Рассмотрим автономное дифференциальное уравнение

$$\dot{x} = v(x) \tag{1}$$

с поглощающей областью U. Пусть $x = \varphi(t; x_0)$ — решение с начальным условием $\varphi(0; x_0) = x_0$.

Определение 1. Пусть $x_0 \in U$. Назовём *ω-предельным множеством* точки x_0 (обозначается $\omega(x_0)$) множество, определенное следующим образом:

$$\omega(x_0) = \{x \in U \mid \exists \{t_k\}, t_k \to +\infty, \varphi(t_k; x_0) \to x\}.$$

Задача 1. Докажите, что омега-предельное множество любой точки замнкуто (то есть содержит все свои предельные точки).

Задача 2. Какими могут быть омега-предельные множества для дифференциальных уравнений на прямой?

Задача 3. Верно ли, что для любой точки $y \in \omega(x)$, $\omega(y) = \omega(x)$?

Задача 4. Найти отображение Пуанкаре для предельного цикла системы

$$\dot{x} = y + x(1 - x^2 - y^2), \quad \dot{y} = -x + y(1 - x^2 - y^2)$$

с отрезка $I = \{(x, 0) \mid x \in [1/2, 3/2]\}$ на себя.

Задача 5. Пусть неподвижная точка отображения Пуанкаре, соответствующая предельному циклу, является гиперболической, то есть производная отображения Пуанкаре в этой точке не равна 1. Докажите, что при малых возмущениях системы предельный цикл сохраняется.

Подкова Смейла

Рассмотрим замкнутый квадрат $X = [0, 1]^2$ и следующие замкнутые полосы: вертикальные $\Pi_0' = [1/5, 2/5] \times [0, 1]$ и $\Pi_1' = [3/5, 4/5] \times [0, 1]$ и горизонтальные $\Pi_0 = [0, 1] \times [1/5, 2/5]$ и $\Pi_1 = [0, 1] \times [3/5, 4/5]$. Определим отображение $h\colon \Pi_0 \cap \Pi_1 \to X$ следующим образом: каждая из горизонтальных полос Π_0, Π_1 сжимается в пять раз по горизонтали, растягивается в пять раз по вертикали и параллельным переносом накладывается на соответствующую вертикальную полосу: Π_0 на Π_0' и Π_1 на Π_1'. В точках квадрата, не лежащих в Π_0 или Π_1, отображение h не определено.

Обозначим через Λ множество точек x, для которых определено $h^n(x)$ для всех $n \in \mathbb{Z}$. Здесь h^n — композиционная степень h.

Определение 2. *Отображением подковы* назовём ограничение h на Λ.

Задача 6. Найдите неподвижные точки h.

Задача 7. Опишите точки, которые стремятся к неподвижным точкам как в будущем, так и в прошлом. Такие точки называют *гомоклиническими*.