Факультет компьютерных наук, 2018/19 уч. год
Дифференциальные уравнения (http://math-info.hse.ru/s18/t)
Семинар 17. Зависимость решений от начальных условий и параметров. Линейные системы с переменными коэффициентами (21.05)
И. В. Щуров, А. А. Айзенберг, И. С. Шилин, М. И. Ронжина

Задача 1. [2] Найти производные по параметру или по начальным условиям от решений данных уравнений и систем.

(a) $y' = y + \mu(x + y^2), \quad y(0) = 1, \quad \left.\dfrac{\partial y}{\partial \mu}\right|_{\mu=0} = ?$

(b) $y' = y + y^2 + xy^3, \quad y(2) = y_0, \quad \left.\dfrac{\partial y}{\partial y_0}\right|_{y_0=0} = ?$

(c) $\dot{x} = \dfrac{x}{t} + \mu t e^{-x}, \quad x(1) = 1, \quad \left.\dfrac{\partial x}{\partial \mu}\right|_{\mu=0} = ?$

(d) $y' = 2x + \mu y^2, \quad y(0) = \mu - 1, \quad \left.\dfrac{\partial y}{\partial \mu}\right|_{\mu=0} = ?$

(e) $\dot{x} = 4ty^2, \quad \dot{y} = 1 + 5\mu x$, начальное условие $x(0) = 0$, $y(0) = 0$, найти $\left.\frac{\partial x}{\partial \mu}\right|_{\mu=0}$.

(f) $\dot{x} = xy + t^2, \quad 2\dot{y} = -y^2$, начальное условие $x(1) = x_0$, $y(1) = y_0$, найти $\left.\frac{\partial x}{\partial y_0}\right|_{x_0=3, y_0=2}$.

Определение 1. Пусть $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ — набор из n вектор-функций, $\varphi_j \colon I \to \mathbb{R}^n$. Определителем Вронского (вронскианом) набора называется определитель

$$W(t) = \begin{vmatrix} \varphi_{11}(t) & \ldots & \varphi_{n1}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_{1n}(t), & \ldots & \varphi_{nn}(t) \end{vmatrix}.$$

Теорема 2. *(Лиувилля) Рассмотрим уравнение*

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x(t) \in \mathbb{R}^n.$$

Пусть $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ — решения этого уравнения, $W(t)$ — вронскиан от этих решений. Тогда

$$\dot{W} = W \mathrm{Tr} A(t).$$

Задача 3. Пусть $y1$ и y_2 — решения уравнения $a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0$. Докажите формулу Остроградского — Лиувилля:

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = Ce^{-\int p(x)dx}, \quad p(x) = a_1(x)/a_0(x).$$

Задача 4. [2] Найти общее решение уравнения, зная его частное решение.

(a) $x^2(x+1)y'' - 2y = 0, \quad y_1 = 1 + \dfrac{1}{x}$.

(b) $xy'' + 2y' - xy = 0, \quad y_1 = \dfrac{e^x}{x}$.

Задача 5. [1] Докажите, что положение равновесия $x = \dot{x} = 0$ для уравнения $\ddot{x} + f(t)x = 0$ (качели) не может быть асимптотически устойчивым ни при каком f.

Подсказка: что происходит с площадями в фазовом пространстве вблизи асимптотически устойчивой особой точки? Может ли это происходить для данного уравнения?

Список литературы

[1] Арнольд В. И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. — Ижевск: Ижевская республиканская типография. 2000. — 368 с.

[2] Филиппов А. Ф. Сборник задач по дифференциальных уравннеиям. — Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2000.