Факультет компьютерных наук, 2018/19 уч. год
Дифференциальные уравнения (http://math-info.hse.ru/s18/t)
Семинар 16. Бифуркации (21.05)
И. В. Щуров, А. А. Айзенберг, И. С. Шилин, М. И. Ронжина

Задача 1. Докажите строго, что гомеоморфизм переводит замкнутые кривые в замкнутые кривые.

Задача 2. Докажите, что система, единственная особая точка которой является асимптотически устойчивой, не может быть орбитально топологически эквивалентной системе, единственная особая точка которой асимптотически неустойчива.

Задача 3. Пусть у дифференциального уравнения с особой точкой x_* существует траектория, которая стремится к x_* в прямом времени (то есть $\lim_{t\to+\infty} x(t) = x_*$ для какого-то решения $x = x(t)$) и существует траектория, которая стремится к x_* в обратном времени (то есть $\lim_{t\to-\infty} x(t) = x_*$ для какого-то (быть может, другого) решения $x = x(t)$). Может ли такая система быть структурно устойчивой, если размерность фазового пространства

(a) равна 1?
(b) больше 1?

Задача 4. Рассмотрим семейство

$$\begin{cases} \dot{x} = \varepsilon x + 2y + cx(x^2+y^2) \\ \dot{y} = -2x + \varepsilon y + cy(x^2+y^2) \end{cases} \tag{1}$$

Перейти в полярные координаты. Построить фазовые портреты при $\varepsilon > 0$, $\varepsilon = 0$, $\varepsilon < 0$ при $c > 0$ и $c < 0$. Пусть c фиксировано. При каком значении ε происходит бифуркация?

Задача 5. Постройте полиномиальное векторное поле, имеющее

(a) два предельных цикла;
(b) n предельных циклов.