Факультет компьютерных наук, 2018/19 уч. год
Дифференциальные уравнения (http://math-info.hse.ru/s18/t)
Семинар 15. Нелинейные системы и устойчивость (14.05)
И. В. Щуров, А. А. Айзенберг, И. С. Шилин, М. И. Ронжина

Определение 1. Дифференциальные уравнения $\dot{x} = v(x)$ и $\dot{y} = w(y)$ называются *орбитально топологически эквивалентными* если существует такая непрерывная замена координат (гомеоморфизм: обратимое непрерывное отображение, для которого обратное также непрерывно), которая переводит фазовые кривые одного уравнения в фазовые кривые другого уравнения с сохранением направления движения.

Задача 1. Доказать, что уравнения $\dot{x} = x^2 - 1$ и $\dot{y} = y^2 - 4$ орбитально топологически эквивалентны. Фазовое пространство считать отрезком $[-10, 10]$.

Задача 2. Являются ли орбитально топологически эквивалентными уравнения $\dot{x} = x + x^3$ и $\dot{x} = x - x^3$? Фазовое пространство считать отрезком $[-10, 10]$.

Задача 3. Найти замену координат, которая переводит фазовый портрет уравнения

$$\dot{x} = -x + y \quad \dot{y} = -x - y$$

в фазовый портрет уравнения

$$\dot{x} = -x \quad \dot{y} = -y.$$

Задача 4. Пусть уравнения $\dot{x} = v(x)$ и $\dot{y} = \tilde{v}(y)$ орбитально топологически эквивалентны. Пусть x_* — особая точка первого уравнения, устойчивая по Ляпунову. Что вы можете сказать про устойчивость точки $y_* = h(x_*)$ для второго уравнения, где h — гомеоморфизм, осуществляющий эквивалентность?

Определение 2. Дифференциальное уравнение $\dot{x} = v(x)$ называется *структурно устойчивым*, если оно орбитально топологически эквивалентно своему C^1-малому возмущению. Иными словами, существует такое $\varepsilon_0 > 0$, что для всякого w, такого, что $\|w(x)\| < \varepsilon_0$ и $\|\partial w/\partial x\| < \varepsilon_0$, дифференциальное уравнение $\dot{x} = v(x) + w(x)$ орбитально топологически эквивалентно исходному уравнению.

Задача 5. Доказать пользуясь определением что уравнение $\dot{x} = x^3$ не является структурно устойчивым.

Задача 6. Рассмотрим семейство уравнений на плоскости

$$\dot{x} = c - x^2, \quad \dot{y} = -y$$

Построить фазовые портреты при $c < 0$, $c = 0$, $c > 0$. Что происхоит при прохождение параметром c значения 0? При каких значениях c уравнение является структурно устойчивым, а при каких не является? (Из этой задачи должно быть понятно, почему бифуркацию, обсуждавшуюся на лекции, называют седло-узловой.)

Задача 7. (*) Придумать и доказать критерий структурной устойчивости для автономных дифференциальных уравнений на прямой (то есть в размерности 1).