Факультет компьютерных наук, 2018/19 уч. год
Дифференциальные уравнения (http://math-info.hse.ru/s18/t)
Семинар 12. Линейные системы: комплексные собственные значения (16.04)
И. В. Щуров, А. А. Айзенберг, И. С. Шилин, М. И. Ронжина

Задача 1. Решить уравнение на комплексной прямой $z(t) \in \mathbb{C}$:

(a) $\dot{z} = -2iz$. (b) $\dot{z} = (2+4i)z$. (c) $\dot{z} = (-1+i)z$.

Задача 2. Пусть $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$. Записать уравнения из задачи 1 в матричном виде в координатах (x, y). Записать решения получившихся уравнений. Нарисовать фазовые портреты.

Задача 3. Найти все вещественные решения следующих систем. Определить тип особой точки.

(a) $\dot{x} = -x - 2y, \quad \dot{y} = 4x + 3y$.
(b) $\dot{x} = -x - 5y, \quad \dot{y} = x + y$.
(c) $\dot{x} = 8x + 25y, \quad \dot{y} = -2x - 6y$.
(d) $\dot{x} = 5x + 4y, \quad \dot{y} = -10x - 7y$.

Указание. Найти какой-нибудь собственный вектор v матрицы системы. Он окажется комплексным, сопряженный к нему вектор также будет собственным (с сопряженным собственным значением). Пусть соответствующее собственное значение равно $\lambda = \alpha + i\omega$. Тогда у уравнения есть решения $ve^{\lambda t}$ и $\bar{v}e^{\bar{\lambda}t}$, а также, по линейности, все их линейные комбинации. Чтобы найти вещественные решения, достаточно взять вещественную и мнимую части $ve^{\lambda t}$ (почему они будут решениями?) и все их линейные комбинации.

(Почему этот рецепт эквивалентен методу, обсуждавшемуся на лекции?)

Задача 4. При каком значении параметра α система имеет особую точку типа «центр»? Нарисовать фазовый портрет системы при этом значении α.

$$\dot{x} = \alpha x + 2y, \quad \dot{y} = -5x - 3y$$

Задача 5. Рассмотрим линейную систему на плоскости. Пусть она имеет особую точку известного типа (селдо, узел, центр или фокус). Существует ли в окрестности начала координат непрерывный непостоянный первый интеграл?

Задача 6. Рассмотрим систему

$$\dot{x} = -x + y, \quad \dot{y} = -x - y, \quad \dot{z} = z$$

Найти все её решения. Как выглядят её фазовые кривые? Для каких начальных условий (x_0, y_0, z_0) решение имеет конечный предел при $t \to +\infty$?

Задача 7. Определить тип особой точки в зависимости от значения параметра $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\dot{x} = x + \alpha y, \quad \dot{y} = 5x + 2y.$$

Задача 8. (*) Рассмотрим линейную систему

$$\dot{x}_1 = -x_2, \quad \dot{x}_2 = x_1, \quad \dot{x}_3 = -\omega x_4, \quad \dot{x}_4 = \omega x_3.$$

При каких значениях $\omega \in \mathbb{R}$ у этой системы существует периодическое решение, у которого все компоненты являются непостоянными?