Факультет компьютерных наук, 2018/19 уч. год
Дифференциальные уравнения (http://math-info.hse.ru/s18/t)
Семинар 9. Замены координат (12.03/15.03)
И. В. Щуров, А. А. Айзенберг, И. С. Шилин, М. И. Ронжина

Задача 1. Для уравнения $(\dot{x}, \dot{y}) = w(x, y)$ найти замену координат (u, v), приводящую его к виду

$$\dot{u} = 1, \quad \dot{v} = 0$$

вблизи данной точки P:

(a) $w = (1, 2), \quad P = (0, 0)$;
(b) $w = (x, 2y), \quad P = (0, 1)$;
(c) $w = (2x, -y), \quad P = (-2, 0)$.

Задача 2. Для следующих систем осуществить переход к полярным координатам, то есть записать уравнения для новых координат φ и r, где $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$.

Построить фазовые портреты в новых и старых координатах.

(a) $\dot{x} = -y, \quad \dot{y} = x$;
(b) $\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -x$;
(c) $\dot{x} = x - y, \quad \dot{y} = x + y$;
(d) $\dot{x} = -x - y, \quad \dot{y} = x - y$;
(e) $\dot{x} = x + y, \quad \dot{y} = -x + y$;
(f) (*) $\begin{cases} \dot{x} = y + x(1 - x^2 - y^2); \\ \dot{y} = -x + y(1 - x^2 - y^2). \end{cases}$

Задача 3. Для следующих систем найти какой-нибудь глобальный непостоянный непрерывный первый интеграл, либо доказать, что его не существует.

(a) $\dot{x} = \sin(x + y), \quad \dot{y} = \cos(x + y + z), \quad \dot{z} = 0$;
(b) $\dot{x} = -y, \quad \dot{y} = x, \quad \dot{z} = \sin(x^2 + y^2 + z^2)$;
(c) $\dot{x} = x, \quad \dot{y} = 2y, \quad \dot{z} = -3z$;
(d) $\dot{x} = x, \quad \dot{y} = 2y, \quad \dot{z} = 3z$.

Задача 4. Найти все периодические решения системы уравнений.

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -x, \quad \dot{z} = -z.$$

Задача 5. Найти фазовые кривые системы уравнений.

(a) $\dot{x} = x^2, \quad \dot{y} = y(x + y)$;
(b) $\dot{x} = y^2 + 2y + 1, \quad \dot{y} = x^2 - 1$;
(c) $\dot{x} = 2y\cos^2 x, \quad \dot{y} = 1 + y^2 \sin 2x$;
(d) $\dot{x} = -y + 2x, \quad \dot{y} = x + 2y$.