

Факультет компьютерных наук, 2018/19 уч. год

Дифференциальные уравнения (<http://math-info.hse.ru/s18/t>)

Семинар 8. Консервативные уравнения с одной степенью свободы (5.03.2019)

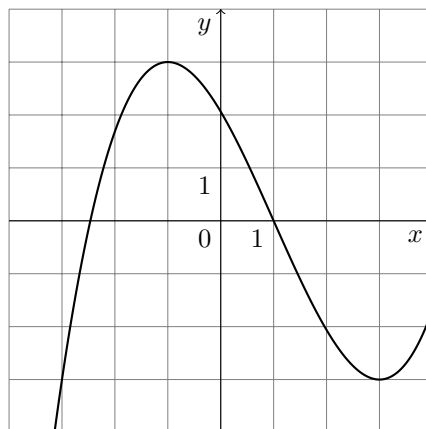
И. В. Щуров, А. А. Айзенберг, И. С. Шилин, М. И. Ронжина

Задача 1. При каком значении параметра α система

$$\dot{x} = \alpha x, \quad \dot{y} = y$$

имеет непрерывный первый интеграл, определенный в полной окрестности начала координат?

Задача 2. На рисунке изображен график функции $y = f(x)$. Построить на одном и том же рисунке эскизы графиков следующих функций. (Обратите особое внимание на поведение производной вблизи границ области определения. Используйте теорему о производной сложной функции.)



- | | | | |
|-------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|
| (a) $\sqrt{f(x)}$; | (c) $\sqrt{f(x) - 3}$; | (e) $\sqrt{f(x) + 1}$; | (g) $\sqrt{f(x) + 3}$; |
| (b) $\sqrt{f(x) - 2}$; | (d) $\sqrt{f(x) - 4}$; | (f) $\sqrt{f(x) + 2}$; | (h) $\sqrt{f(x) + 4}$. |

Задача 3. Рассмотрим уравнение $\ddot{x} = f'(x)$, где $f(x)$ — функция из предыдущей задачи.

- Найти потенциальную энергию. Как выглядит график потенциальной энергии?
- Записать функцию полной энергии.
- Построить несколько линий уровня функции полной энергии.
- Построить фазовый портрет. Отметить все положения равновесия. Указать, какие из них являются устойчивыми, а какие неустойчивыми. Указать все начальные условия, соответствующие периодическим решениям. Указать все начальные условия, для которых решения имеют предел при $t \rightarrow +\infty$ или $t \rightarrow -\infty$.

Задача 4. Построить фазовые портреты для следующих уравнений. Найти все положения равновесия, указать, являются ли они устойчивыми или неустойчивыми. Указать все начальные условия, соответствующие периодическим решениям. Указать все начальные условия, для которых решения имеют предел при $t \rightarrow +\infty$ или $t \rightarrow -\infty$.

- | | |
|------------------------------|------------------------------------|
| (a) $\ddot{x} = x^2 - 1$; | (d) $\ddot{x} = -4x^3 + 4x$; |
| (b) $\ddot{x} = 1 - x^2$; | (e) $\ddot{x} = x^3 - x^2 - 2x$; |
| (c) $\ddot{x} = 4x^3 - 4x$; | (f) $\ddot{x} = -x^3 + x^2 + 2x$; |