Факультет компьютерных наук, 2018/19 уч. год
Дифференциальные уравнения (http://math-info.hse.ru/s18/t)
Семинар 7. Уравнения в полных дифференциалах (26.02/29.02)
И. В. Щуров, А. А. Айзенберг, И. С. Шилин, М. И. Ронжина

Задача 1. Найдите производную функции $F(x, y) = x^2 - y^2$ вдоль следующих векторных полей:

(a) $(2, 3)$; (b) (x, y); (c) (y, x); (d) $(1, -e^y)$.

Задача 2. [1] Найти первый интеграл для следующих уравнений или систем. Как выглядят их фазовые кривые?

(a) $\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -2x \end{cases}$ (b) $\begin{cases} \dot{x} = x \\ \dot{y} = -y \end{cases}$ (c) $\begin{cases} \dot{x} = y^2 - x^2 \\ \dot{y} = 2xy \end{cases}$ (d) $\begin{cases} \dot{x} = 2y + xe^{-y} \\ \dot{y} = e^{-y} \end{cases}$

Задача 3. (Частично основано на [1].) Докажите, что указанные функции являются первыми интегралами данных систем дифференциальных уравнений.

(a) $\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -x^2 - y^2 - x, \end{cases} \qquad F(x, y) = e^x \sqrt{x^2 + y^2}.$

(b) $\begin{cases} \dot{x} = x, \\ \dot{y} = x^2 + y^2 + y, \end{cases} \qquad F(x, y) = x + \operatorname{arctg} \dfrac{x}{y}.$

(c) $\begin{cases} \dot{x} = -x\sqrt{1 + y^2} + y, \\ \dot{y} = y\sqrt{1 + y^2}, \end{cases} \qquad F(x, y) = xy - \sqrt{1 + y^2}.$

(d) $\begin{cases} \dot{x} = x, \\ \dot{y} = -y, \\ \dot{z} = z, \end{cases} \qquad F(x, y, z) = xy, \quad G(x, y, z) = yz.$

Задача 4. Найдите какие-нибудь первые интегралы для системы. Сколько «разных» первых интегралов вы можете найти?

(a) $\begin{cases} \dot{x} = -x \\ \dot{y} = y \\ \dot{z} = 0 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} \dot{x} = -x \\ \dot{y} = y \\ \dot{z} = 2z \end{cases}$

Определение 1. Уравнение вида

$$y' + a(x)y = b(x)y^n, \quad n \neq 1$$

называется *уравнением Бернулли.*

Замечание 1. *Чтобы решить уравнение Бернулли, надо обе его части разделить на y^n и сделать замену $z = y^{1-n}$. После замены уравнение сводится к линейному.*

Задача 5. [1] Решить уравнения.

(a) $y' + 2y = y^2 e^x$; (c) $y' = y^4 \cos x + y \operatorname{tg} x$;
(b) $(x + 1)(y' + y^2) = -y$; (d) $xy\,dy = (y^2 + x)\,dx$.

Список литературы

[1] Филиппов А. Ф. Сборник задач по дифференциальных уравннеиям. — Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2000.