

Факультет компьютерных наук, 2018/19 уч. год

Дифференциальные уравнения (<http://math-info.hse.ru/s18/t>)

Семинар 6. Уравнения в полных дифференциалах (19.02/21.02)

И. В. Щуров, А. А. Айзенберг, И. С. Шилин, М. И. Ронжина

Определение 1. Пусть $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ — некоторая функция. Её *дифференциалом* называется дифференциальная 1-форма $df(x, v)$, для которой справедливо следующее:

$$f(x + v) = f(x) + df(x, v) + o(|v|).$$

Теорема 1. Если дифференциал существует, то он записывается в виде

$$df(x, v) = \frac{\partial f(x)}{\partial x_1} dx_1(v) + \dots + \frac{\partial f(x)}{\partial x_n} dx_n(v),$$

где dx_k — координатный функционал, то есть функционал, принимающий на векторе $v = (v_1, \dots, v_n)$ значение $dx_k(v) = v_k$.

Обычно зависимость от v не указывают и пишут просто:

$$df(x) = \frac{\partial f(x)}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f(x)}{\partial x_n} dx_n.$$

Задача 2. Для следующих функций $f(x, y)$

- найти дифференциал df ;
- построить линии уровня $f(x, y) = \text{const}$;
- построить поле направлений, заданное уравнением $df = 0$.

$$(a) f(x, y) = x^2 + y^2; \quad (b) f(x, y) = xy; \quad (c) f(x, y) = x - y^2; \quad (d) f(x, y) = e^{x^2 + 4y^2}.$$

Задача 3. (*) Доказать, что поле направлений, заданное уравнением $df = 0$, в каждой точке касается линий уровня функции f .

Определение 2. Уравнение

$$F(x, y)dx + G(x, y)dy = 0 \tag{1}$$

называется *уравнением в полных дифференциалах*, если существует такая функция $H(x, y)$, что левая часть уравнения (1) является полным дифференциалом $dH(x, y)$, то есть $F(x, y) = \frac{\partial H(x, y)}{\partial x}$ и $G(x, y) = \frac{\partial H(x, y)}{\partial y}$.

Замечание 1. Интегральными кривыми уравнения (1) являются линии уровня функции H .

Теорема 4. Уравнение (1) является уравнением в полных дифференциалах тогда и только тогда, когда $\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial G}{\partial x}$.

Замечание 2. Если выполняется условие теоремы 4, функцию H можно найти следующим образом: проинтегрировать функцию F по x , полагая y фиксированным; при этом константа интегрирования будет зависеть от y , и её можно будет найти, подставив результат интегрирования в уравнение $\frac{\partial H}{\partial y} = G$.

Задача 5. Найти выражение, задающее интегральные кривые следующих уравнений:

$$(a) (2x + 3x^2y)dx + (x^3 - 3y^2)dy = 0; \quad (c) \dot{x} = \frac{t(9tx^2 - 2)}{x(4x^2 - 6t^3)};$$

$$(b) 2xy dx + (x^2 - y^2) dy = 0; \quad (d) e^{-y} dx - (2y + xe^{-y}) dy = 0.$$

Линейные уравнения первого порядка

Определение 3. Уравнение вида

$$y' = a(x)y \quad (2)$$

называется *однородным линейным уравнением* (первого порядка в размерности 1, с переменными коэффициентами), а уравнение

$$y' = a(x)y + b(x) \quad (3)$$

называется *неоднородным* линейным уравнением.

Замечание 3. *Однородное линейное уравнение является уравнением с разделяющимися переменными.*

Задача 6. (*) Решить уравнение (2) в общем виде.

Замечание 4. *Уравнение (3) превращается в уравнение в полных дифференциалах, если домножить его на функцию*

$$I(x) = e^{-\int a(x)dx}.$$

Задача 7. Решить следующие уравнения.

(a) $\dot{x} = x + t$;

(b) $xy' - 2y = 2x^4$;

(c) $(2x + 1)y' = 4x + 2y$;

(d) $(xy + e^x)dx - x dy = 0$;

(e) $x^2y' + xy + 1 = 0$;

(f) $y' = \frac{y}{3x - y^2}$.