Факультет компьютерных наук, 2018/19 уч. год
Дифференциальные уравнения (http://math-info.hse.ru/s18/t)
Семинар 4. Фазовые пространства (5.02/8.02)

И. В. Щуров, А. А. Айзенберг, И. С. Шилин, М. И. Ронжина

Задача 1. Для следующих систем уравнений:

- построить векторное поле и нарисовать эскизы фазовых кривых;
- решить — найти явно зависимость $(x(t), y(t))$ (подсказка: в приведенных системах уравнения не зависят друг от друга);
- найти уравнения фазовых кривых, то есть зависимость $y(x)$.

(a) $\dot{x} = 0, \quad \dot{y} = 0;$
(b) $\dot{x} = 2, \quad \dot{y} = 1;$
(c) $\dot{x} = 1, \quad \dot{y} = y;$
(d) $\dot{x} = x, \quad \dot{y} = y;$
(e) $\dot{x} = 2x, \quad \dot{y} = y;$
(f) $\dot{x} = x, \quad \dot{y} = -y;$
(g) $\dot{x} = x^2, \quad \dot{y} = -y.$

Задача 2. Рассмотрим систему

$$\dot{x} = -y, \quad \dot{y} = x.$$

(a) Нарисовать векторное поле.
(b) Нарисовать эскиз фазовых кривых.
(c) Угадать, как будут выглядеть настоящие фазовые кривые и доказать, что действительно так.

Теорема 3. *Рассмотрим автономную систему*

$$\dot{x} = f(x, y), \quad \dot{y} = g(x, y). \tag{1}$$

и неавтономное уравнение

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g(x, y)}{f(x, y)}. \tag{2}$$

Для любой точки $P = (x_0, y_0)$, такой, что $f(x_0, y_0) \neq 0$, фазовая кривая автономной системы (1)*, проходящая через P, в некоторой окрестности P совпадает с интегральной кривой соответствующего неавтономного уравнения* (2).

Задача 4. Докажите, что в любой точке $P = (x_0, y_0)$, такой, что $f(x_0, y_0) \neq 0$, вектор векторного поля (1), отложенный от этой точки, лежит на прямой из поля направлений уравнения (2), проходящей через эту точку.

Доказательство теоремы 3. В окрестности точки P векторы векторного поля (1) лежат на прямых поля направлений (2). Интегральные кривые (2) касаются в каждой своей точке прямых из соответствующего поля направлений. Фазовые кривые (1) касаются векторов векторного поля. Поскольку это одни и те же направления, и кривая, задаваемая этим условием, определена однозначно (это следует из теоремы существования и единственности решения дифференциального уравнения), кривые обязаны совпадать. □

Задача 5. Для следующих систем уравнений убедиться в том, что теорема 3 работает.

(a) $\dot{x} = x, \quad \dot{y} = y;$
(b) $\dot{x} = x, \quad \dot{y} = -y;$
(c) $\dot{x} = x^2, \quad \dot{y} = -y;$
(d) $\dot{x} = -y, \quad \dot{y} = x.$

Задача 6. Для следующих уравнений второго порядка записать соответствующую систему первого порядка, построить её векторное поле и найти фазовые кривые (можно в виде неявной функции) путём решения соответствующего неавтономного уравнения.

(a) $\ddot{x} = 1;$
(b) $\ddot{x} = x;$
(c) $\ddot{x} = \dot{x};$
(d) (*) $\ddot{x} = \dot{x} + x.$