Факультет компьютерных наук, 2018/19 уч. год
Дифференциальные уравнения (http://math-info.hse.ru/s18/t)
Семинар 2. Уравнения с разделяющимися переменными (22.01/25.01)
И. В. Щуров, А. А. Айзенберг, И. С. Шилин, М. И. Ронжина

Задача 1. [1], см. также [2] и [3]. Предположим, что скорость прироста популяции пропорциональна не числу особей, а *квадрату* числа особей. Составить и решить соответствующее уравнение, построить поле направлений и интегральные кривые. Что вы можете сказать о вертикальных асимптотах решения? Какую интерпретацию этого явления вы можете привести? Что вы можете сказать об области определения решений?

Замечание 1. *Существует несколько способов записывать дифференциальные уравнения. На лекциях мы пользовались в основном обозначением $\dot{x} = f(x,t)$. В дальнейшем мы будем также часто обозначать независимую переменную через x, а искомую функцию через y, и записывать уравнение в виде $y' = f(x,y)$ или $dy/dx = f(x,y)$. Потом мы будем пользоваться и другими способами записи.*

Задача 2. [4] Найти все[1] решения уравнений. Также найти явно все решения с заданными начальными условиями, если они указаны.

(a) $y' = x^2$.
(b) $y' = e^x$.
(c) $y' = e^y$.
(d) $\dot{x} = t^2 + 1$, $x(1) = 2$
(e) $\dot{x} = -3x$, $x(3) = 10$.
(f) $\dot{x} = 2x+t$, $x(0) = -1/4$ (подсказка: рассмотреть замену $z = 2x+t$). Построить поле направлений и эскиз интегральных кривых.
(g) $\dot{x} = x^2 + 1$.
(h) $\dot{x} = x \ln x$, $x > 0$.
(i) $\dot{x} = 10^x$.
(j) $\dot{x} = 1/(t + 2x)$; $x(0) = -1$. Построить поле направлений и эскиз интегральных кривых.
(k) $\dot{x} = \cos(x - t)$.

Задача 3. Найдите все[2] решения уравнения с разделяющимися переменными. Нарисуйте соответствующее поле направлений и его *интегральные кривые*.

(a) $y' = y/x$;
(b) $y' = 2y/x$;
(c) $y' = y/(2x)$;
(d) $y' = -y/x$;
(e) $y' = -x/y$;
(f) $y' = xy$;
(g) $y' = -xy$.

Задача 4. [4] Решите уравнения:

(a) $(x^2 + 4)y' = 2xy$;
(b) $y' = -xe^y$;
(c) $y' \operatorname{ctg}^2(x) + \operatorname{tg}^2(y) = 0$;
(d) $xy' + y = y^2$.

Список литературы

[1] Арнольд В. И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. — Ижевск: Ижевская республиканская типография. 2000. — 368 с.
[2] Heinz von Foerster, P. M. Mora and L. W. Amiot (November 1960) *Doomsday: Friday, 13 November, A.D. 2026. At this date human population will approach infinity if it grows as it has grown in the last two millenia.* Science **132** (3436): 1291–1295.doi:10.1126/science.132.3436.1291
[3] Щуров И. В. На пути к концу света. // N+1, 9.07.2015. `https://nplus1.ru/material/2015/07/09/doomsday`.
[4] Филиппов А. Ф. Сборник задач по дифференциальных уравннеиям. — Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2000.

[1] Строго говоря, мы ещё не обсуждали теорему, которая бы позволила доказать, что найдены действительно все решения; найдите по крайней мере все решения, которые можно найти с помощью методов, обсуждавшихся на лекции.
[2] см. предыдущую сноску