

**Факультет компьютерных наук, 2018/19 уч. год****Дифференциальные уравнения** (<http://math-info.hse.ru/s18/t>)**Семинар 2. Уравнения с разделяющимися переменными (22.01/25.01)**

И. В. Щуров, А. А. Айзенберг, И. С. Шилин, М. И. Ронжина

**Задача 1.** [1], см. также [2] и [3]. Предположим, что скорость прироста популяции пропорциональна не числу особей, а *квадрату* числа особей. Составить и решить соответствующее уравнение, построить поле направлений и интегральные кривые. Что вы можете сказать о вертикальных асимптотах решения? Какую интерпретацию этого явления вы можете привести? Что вы можете сказать об области определения решений?

**Замечание 1.** Существует несколько способов записывать дифференциальные уравнения. На лекциях мы пользовались в основном обозначением  $\dot{x} = f(x, t)$ . В дальнейшем мы будем также часто обозначать независимую переменную через  $x$ , а искомую функцию через  $y$ , и записывать уравнение в виде  $y' = f(x, y)$  или  $dy/dx = f(x, y)$ . Потом мы будем пользоваться и другими способами записи.

**Задача 2.** [4] Найти все<sup>1</sup> решения уравнений. Также найти явно все решения с заданными начальными условиями, если они указаны.

- |  |   |
|--|---|
| (a) $y' = x^2$ .   | (g) $\dot{x} = x^2 + 1$ .   |
| (b) $y' = e^x$ .   | (h) $\dot{x} = x \ln x, x > 0$ .  |
| (c) $y' = e^y$ .   | (i) $\dot{x} = 10^x$ .  |
| (d) $\dot{x} = t^2 + 1, x(1) = 2$  | (j) $\dot{x} = 1/(t + 2x); x(0) = -1$ . Построить поле направлений и эскиз интегральных кривых. |
| (e) $\dot{x} = -3x, x(3) = 10$ .   | (k) $\dot{x} = \cos(x - t)$ .   |
| (f) $\dot{x} = 2x + t, x(0) = -1/4$ (подсказка: рассмотреть замену $z = 2x + t$ ). Построить поле направлений и эскиз интегральных кривых. |   |

**Задача 3.** Найдите все<sup>2</sup> решения уравнения с разделяющимися переменными. Нарисуйте соответствующее поле направлений и его *интегральные кривые*.

- |                   |                     |                   |                  |
|-------------------|---------------------|-------------------|------------------|
| (a) $y' = y/x$ ;  | (c) $y' = y/(2x)$ ; | (e) $y' = -x/y$ ; | (g) $y' = -xy$ . |
| (b) $y' = 2y/x$ ; | (d) $y' = -y/x$ ;   | (f) $y' = xy$ ;   |                  |

**Задача 4.** [4] Решите уравнения:

- |                           |   |
|---------------------------|---|
| (a) $(x^2 + 4)y' = 2xy$ ; | (c) $y' \operatorname{ctg}^2(x) + \operatorname{tg}^2(y) = 0$ ; |
| (b) $y' = -xe^y$ ;        | (d) $xy' + y = y^2$ .   |

**Список литературы**

- [1] Арнольд В. И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. — Ижевск: Ижевская республиканская типография, 2000. — 368 с.
- [2] Heinz von Foerster, P. M. Mora and L. W. Amiot (November 1960) *Doomsday: Friday, 13 November, A.D. 2026. At this date human population will approach infinity if it grows as it has grown in the last two millenia*. Science **132** (3436): 1291–1295. doi:10.1126/science.132.3436.1291
- [3] Щуров И. В. На пути к концу света. // N+1, 9.07.2015. <https://nplus1.ru/material/2015/07/09/doomsday>.
- [4] Филиппов А. Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. — Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2000.

<sup>1</sup>Строго говоря, мы ещё не обсуждали теорему, которая бы позволила доказать, что найдены действительно все решения; найдите по крайней мере все решения, которые можно найти с помощью методов, обсуждавшихся на лекции.

<sup>2</sup>см. предыдущую сноску