Факультет компьютерных наук, 2018/19 уч. год
Дифференциальные уравнения (http://math-info.hse.ru/s18/t)
Семинар 1. Основные понятия (15.01/18.01)
И. В. Щуров, А. А. Айзенберг, И. С. Шилин, М. И. Ронжина

Задача 1. Для каждого уравнения построить его поле направлений. Пользуясь полем направлений, нарисовать эскизы интегральных кривых. Найти или угадать общее решение, построить «настоящие» интегральные кривые и сравнить с эскизом.

(a) $\dot{x} = 0$; (b) $\dot{x} = -1$; (c) $\dot{x} = 2t$; (d) $\dot{x} = \frac{x}{t}$; (e) $\dot{x} = -\frac{x}{t}$; (f) $\dot{x} = -\frac{t}{x}$.

Задача 2. [1, 2] Предположим, что величина биологической популяции (например, число рыб в пруду) в момент времени t равна $x(t)$ и что скорость прироста пропорциональна наличному количеству особей. (Это предположение приближенно выполняется, пока пищи достаточно много.) Тогда функция $x(t)$ является решением дифференциального уравнения

$$\dot{x} = kx, \quad k > 0.$$

(a) Нарисовать поле направлений для этого дифференциального уравнения.
(b) Нарисовать эскизы интегральных кривых (графиков решения в расширенном фазовом пространстве). Как будет зависеть вид интегральных кривых от параметра?
(c) Существуют ли решения уравнения, являющиеся постоянными?
(d) Угадать решение: найти зависимость $x(t)$ явно и проверить, что она удовлетворяет уравнению.
(e) Пусть в начальный момент времени $t = 0$ размер популяции равен x_0. Найти решение, удовлетворяющее этому начальному условию.

Задача 3. [2] Предположим, что мы находимся в условиях задачи 2, но из-за ограниченности ресурсов коэффициент прироста (доля популяции, воспроизводящаяся за единицу времени) не является постоянным, а зависит от x как линейная функция: $a - bx$. (С ростом x всё меньшему числу особей удаётся найти достаточно ресурсов, чтобы продолжить род.) Записать дифференциальное уравнение, описывающее данную модель. Решить для неё все пункты задачи 2, кроме 2d и 2e. Что вы можете сказать о постоянных решениях получающегося уравнения? Что вы можете сказать о решениях с начальными условиями, близкими к этим постоянным решениям?

Задача 4. Будем решать задачу Коши для дифференциального уравнения

$$\dot{x} = f(t, x) \tag{1}$$

и начального условия $x(0) = x_0$ методом Эйлера на отрезке $[0, 1]$. Разобьём отрезок $[0, 1]$ на n равных частей, положим $h = 1/n$, $t_{n,k} = k/n$, $k = 0, \ldots, n$. Для заданного n положим $x_{n,0} = x_0$ и для $k = 1, \ldots, n$ найдём последовательно

$$x_{n,k} = x_{n,k-1} + hf(t_{n,k-1}, x_{n,k-1}).$$

Пусть $f(t, x) = x$ (то есть решается уравнение $\dot{x} = x$). Найти

$$\lim_{n\to\infty} x_{n,n}.$$

Задача 5. (*) Что вы можете сказать о скорости сходимости эйлеровских приближений к истинному решению уравнения вида (1) при уменьшении шага h?

Список литературы

[1] Malthus *An Essay on the Principle of Population.* London: J. Johnson, in St. Paul's Church-yard, 1798. EconLib-1798
[2] Арнольд В. И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. — Ижевск: Ижевская республиканская типография. 2000. — 368 с.