

Дискретная математика

2017/2018 учебный год

(А. В. Михайлович)

Задания к семинару №7

(срок выполнения – 5 июня 2018 года.)

Задача 1*. На одном обитаемом острове построено 10 городов и 42 дороги, соединяющие города (дороги двусторонние, два города соединяет не более одной дороги). Являются ли следующие утверждения всегда верными, в некоторых случаях верными или ложными (обязательно пояснить)?

1. Существует три города, такие что никакие два из них не соединены между собой дорогами.
2. В каждый город входит не более 8 дорог.
3. Существует город, который не соединён с другими городами.
4. Существует четыре города, такие что никакие два из них не соединены между собой дорогами.
5. Из любого города можно проехать в любой другой, используя не более двух дорог.
6. Из всех городов выходит одинаковое число дорог.
7. Из всех городов выходит разное число дорог.

Задача 2. Пусть G — простой граф, а \bar{G} — его дополнение. Доказать, что

1. хотя бы один из графов G или \bar{G} связан;
2. если в G более 4 вершин, то хотя бы в одном из графов G или \bar{G} имеется цикл;

Задача 3. Рассмотрим граф G Московского метрополитена, где вершины — это станции (одна вершина включает в себя саму станцию и те станции, до которых можно добраться не выходя из метро и не используя поезда метро), а рёбра — перегоны между станциями.

1. Найти центр графа и периферийные точки.
2. Найти диаметр графа и радиус графа.
3. Существуют ли в графе мосты и точки сочленения?

Задача 4. Найти количество целочисленных решений системы, содержащих хотя бы одно чётное число.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 25; \\ x_1 > 0; \\ x_2 > 1; \\ x_3 > 2; \\ x_4 \geq 2; \\ x_5 \geq 1. \end{cases}$$

Задача 5.

1. Найти количество целых чисел от 1 до 10000, которые делятся хотя бы на одно из чисел 11, 13, 17.
2. Найти количество целых чисел от 1 до 10000, которые не делятся ни на одно из чисел 15, 21, 35.

Задача 6. Найти количество попарно неизоморфных графов с 12 вершинами, в которых степень каждой вершины равна 2.

Задача 7.

1. Найти количество попарно неизоморфных графов, содержащих 9 вершин и 32 ребра.
2. Найти количество попарно неизоморфных графов, содержащих 20 вершин и 16 ребер, причем степень каждой вершины не превосходит 2.
3. Найти количество попарно неизоморфных графов со следующим набором степеней вершин: (10; 10; 10; 10; 10; 10; 9; 9; 8; 8; 8).
4. Найти количество попарно неизоморфных графов со следующим набором степеней вершин: (11; 11; 4; 4; 4; 4; 3; 3; 3; 3; 2).

Задача 8. Верно ли, что два графа изоморфны если

1. у них по 10 вершин, степень каждой из которых равна 9?
2. у них по 8 вершин, степень каждой из которых равна 3?
3. они связаны, без циклов и содержат по 6 ребер?

Задача 9. Выяснить, какие графы на картинке (ссылка отдельно) являются изоморфными, а какие нет. Если графы изоморфны, привести изоморфизм, если нет, объяснить почему.