

Дискретная математика

2017/2018 учебный год

(А. В. Михайлович)

Задания к семинару №6

(срок выполнения – 2 июня 2018 года.)

Задача 1. В простом графе 10 вершин.

1. Какое минимальное и максимальное число компонент связности в этом графе?
2. Какое минимальное и максимальное число ребер в этом графе?
3. В графе 3 компоненты связности. Какое минимальное и максимальное число ребер в этом графе?
4. В графе 5 компонент связности. Какое минимальное и максимальное число ребер в этом графе?
5. В графе 40 ребер. Какое число компонент связности может быть в этом графе?
6. В графе 30 ребер. Какое число компонент связности может быть в этом графе?

Важно! Не надо искать готовую формулу (она есть, мы её разберём на ближайшем занятии).

Задача 2. В графе 10 вершин, степень каждой вершины равна 3. Сколько ребер надо удалить из графа, чтобы оставшийся граф был деревом, содержащим исходные 10 вершин?

Задача 3. Привести пример графа с набором степеней вершин (1, 1, 2, 3, 3, 3, 3, 3, 5) и одной компонентой связности? Двумя компонентами связности? Какое максимальное число компонент связности может быть в графе с таким набором степеней вершин?

Задача 4*. На одном обитаемом острове построено 10 городов и 42 дороги, соединяющие города (дороги двусторонние, два города соединяет не более одной дороги). Являются ли следующие утверждения всегда верными, в некоторых случаях верными или ложными (обязательно пояснить)?

1. Существует три города, такие что никакие два из них не соединены между собой дорогами.
2. В каждый город входит не более 8 дорог.
3. Существует город, который не соединён с другими городами.
4. Существует четыре города, такие что никакие два из них не соединены между собой дорогами.

5. Из любого города можно проехать в любой другой, используя не более двух дорог.
6. Из всех городов выходит одинаковое число дорог.
7. Из всех городов выходит разное число дорог.

Задача 5. В простом графе с 40 вершинами и 50 ребрами степень каждой вершины равна 2 или 3. Найти количество вершин степени 2.

Задача 6 Каждый из 17 ученых переписывается с каждым из остальных на каком-то одном из трех языков. Докажите, что найдутся трое ученых, переписывающиеся друг с другом на одном языке.

Задача 7 В стране Миллениум некоторые города связаны между собой авиалиниями. Из столицы выходит 2017 авиалиний, из города Тьма-Таракань — одна, а из всех остальных городов — ровно по 2018 авиалиний. Можно ли из Тьмы-Таракани добраться в столицу?

Задача 8. Пусть G — простой граф, а \bar{G} — его дополнение. Доказать, что

1. хотя бы один из графов G или \bar{G} связан;
2. если в G более 4 вершин, то хотя бы в одном из графов G или \bar{G} имеется цикл;

Задача 9. Рассмотрим граф G Московского метрополитена, где вершины — это станции (одна вершина включает в себя саму станцию и те станции, до которых можно добраться не выходя из метро и не используя поезда метро), а рёбра — перегоны между станциями.

1. Найти центр графа и периферийные точки.
2. Найти диаметр графа и радиус графа.
3. Существуют ли в графе мосты и точки сочленения?

Задача 10. Построить Вконтакте "Интерактивный граф друзей" (для обсуждения задачи лучше сохранить изображение графа).

1. Сколько компонент связности, содержащих более одной вершины, в этом графе?
2. Рассмотрим компоненту связности (без главного героя, он(а) уехал(а) на прекрасный необитаемый остров без интернета), содержащую максимальное число вершин/друзей. Пусть каждый пользователь раз в день смотрит свою ленту и делает репост интересной новости (будем считать, что если человек запостил новость, то те, кто прочитали новость от него, делают репост на следующий день). За какое минимальное и максимальное число дней новость узнают все друзья из этой группы?
3. В графе явно видны отдельные группы. По какому принципу они строятся? Как можно это формализовать?

Задача 11. Рассмотрим произвольное дерево.

1. Существуют ли в дереве мосты и точки сочленения?
2. Сколько центров может быть в дереве? Как это связано с диаметром? (центр — вершина, удалённость которой равна радиусу)
3. Какое соотношение диаметра и радиуса в дереве?

Задача 12 Пусть r — радиус произвольного односвязного графа, а d — его диаметр. Какие значения может принимать число d/r ?

Задача 13 Рассмотрим граф $G = (V, E)$, где $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\}$, $E = \{(v_1, v_2), (v_1, v_3), (v_1, v_4), (v_2, v_3), (v_2, v_4), (v_3, v_4), (v_3, v_5), (v_3, v_6), (v_3, v_7), (v_4, v_5), (v_5, v_6), (v_5, v_7), (v_6, v_7)\}$. Найти следующие параметры.

1. Удалённость для каждой вершины.
2. Центры.
3. Периферийные точки.
4. Радиус.
5. Диаметр.
6. Число связности.

Задача 14. Расстояние между вершинами u и v в графе G равно 6, а между вершинами v и w — 4. Какое может быть расстояние между вершинами u и w ?

Задача 15. Найти количество целочисленных решений системы, содержащих хотя бы одно чётное число.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 25; \\ x_1 > 0; \\ x_2 > 1; \\ x_3 > 2; \\ x_4 \geq 2; \\ x_5 \geq 1. \end{cases}$$