

ОП «Политология», 2017-18

Математика и статистика, часть 2

Тренировочные задания по блоку «Теория вероятностей»

Не является типовым вариантом контрольной работы! (3 модуль)

А. А. Макаров, А. А. Тамбовцева

Задача 1. Дан ряд распределения случайной величины X :

X	-1	0	2	6	7
p	0.2	0.5		0.1	0.1

- Найдите $P(X \leq 2)$, $P(X < 5.5)$, $P(X > 7)$.
- Найдите $F(1)$, $F(2.5)$, $F(8)$.
- Найдите математическое ожидание X , то есть $E(X)$.
- Найдите дисперсию X , то есть $Var(X)$.
- Найдите стандартное отклонение X , то есть $sd(X)$.

Задача 2. Выборы в некотором сообществе устроены таким образом: каждый участник может голосовать за любое количество кандидатов, в том числе, против всех или за всех сразу. В выборах участвуют 4 кандидата. Про избирателя N известно, что с вероятностью 0.12 он проголосует против всех, с вероятностью 0.25 он проголосует за одного кандидата, с вероятностью 0.36 – за двух, с вероятностью – 0.14 за трех и с вероятностью 0.13 – за четырех.

Про избирателя W известно, что он с вероятностью 0.33 проголосует за одного кандидата, с вероятностью 0.45 за двух кандидатов, с вероятностью 0.08 за трех кандидатов, а также то, что он с равной вероятностью проголосует против всех и за всех кандидатов сразу.

- Пусть случайная величина X – число кандидатов, за которых проголосует избиратель N . Запишите закон распределения случайной величины X .
- Пусть Y – число кандидатов, за которых проголосует избиратель W . Постройте ряд распределения случайной величины Y .
- Мы считаем избирателя «разборчивым», если среднее ожидаемое число кандидатов, за которых он голосует, менее 2. Есть ли среди избирателей N и W «разборчивый» избиратель? Если да, то кто из них «более разборчивый»?

Задача 3. Известно, что случайные величины X и Y независимы, и при этом $E(X) = 4$, $Var(X) = 9$, $E(Y) = -2$, $Var(Y) = 16$. Найдите математическое ожидание и дисперсию следующих величин:

- $W_1 = 2X$
- $W_2 = 2X - 3$
- $W_3 = 4X + 5Y$
- $W_4 = 3X - 7Y + 6$

Задача 4. Известно, что в компаниях A и B работают 3 категории сотрудников: высшая категория, средняя категория и низшая категория. Для каждой категории сотрудников зафиксирован размер заработной платы, но он может несильно меняться в зависимости от текущей ситуации в компании. Заработная плата сотрудников компании A описывается следующим образом:

- сотрудники высшей категории (их 30%) получают 80 тыс. руб.
- сотрудники средней категории (их 30%) 40 тыс. руб.
- сотрудники низшей категории (их 40%) 20 тыс. руб.

Заработная плата сотрудников компании B описывается следующим образом:

- сотрудники высшей категории (их 60%) получают 100 тыс. руб.
- сотрудники средней категории (их 10%) 80 тыс. руб.
- сотрудники низшей категории (их 30%) 10 тыс. руб.

В какой компании средняя (ожидаемая) заработная плата выше? В какой компании заработная плата распределена более однородно? Подтвердите ответ, используя две меры изменчивости: дисперсию и стандартное отклонение.

Задача 5. В некотором сообществе обсуждается принятие нового этического кодекса. Проводится голосование: каждый из членов сообщества независимо голосует за принятие или против. Сообщество довольно однородно – каждый из 12 участников с вероятностью 0.5 проголосует за принятие нового этического кодекса. С какой вероятностью будет принят новый этический кодекс, если для его принятия необходимо не менее $2/3$ голосов «за»?

Задача 6.

- W – бинарная случайная величина с параметром $p = 2/3$. Найдите математическое ожидание и дисперсию случайной величины W .
- U – биномиальная случайная величина с параметрами $p = 4/5$, $n = 7$. Найдите математическое ожидание и дисперсию случайной величины U .

Задача 7. Посиделки студентов-политологов редко обходятся без горячих политических дебатов. Известно, что в 30 случаях из 40 спокойные посиделки политологов перерастают в бурные дискуссии на политическую тематику, причем известно, что это соотношение не изменяется от посиделок к посиделкам, и наличие дискуссий на одних посиделках никак не влияет на наличие дискуссий на других. Определите, с какой вероятностью из 10 посиделок:

- более 8 закончатся политическими дебатами
- менее 3 закончатся политическими дебатами
- не менее 2 закончатся политическими дебатами

В скольких случаях, в среднем, посиделки политологов перерастают в дискуссии на политическую тематику?

Задача 8. Закон совместного распределения дискретных величин X и Y задан следующей таблицей:

$X \backslash Y$	-2	0	3
-2	0.1	0.2	0.05
3	0.05	0.3	

- Запишите маргинальные распределения случайных величин X и Y .
- Проверьте, являются ли случайные величины X и Y независимыми.
- Найдите $Cov(X, Y)$ и $Corr(X, Y)$. Проинтерпретируйте полученные результаты.

Задача 9. Закон совместного распределения дискретных величин X и Y задан следующей таблицей:

$X \backslash Y$	1	3	4
9	0.03	0.15	0.12
10	0.07	0.35	0.28

Проверьте, являются ли случайные величины X и Y независимыми.

Задача 10. Случайная величина X задается следующим рядом распределения (с пропущенной вероятностью):

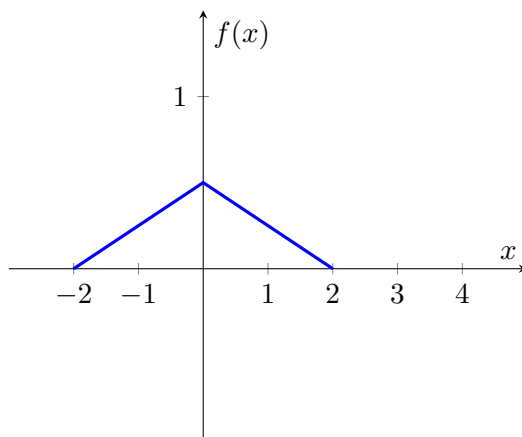
X	-1	0	2	6
p	0.2	0.5		0.1

Случайная величина Y задается следующим рядом распределения (с пропущенной вероятностью):

Y	0	3
p	0.4	

Известно, что случайные величины X и Y независимы. Постройте таблицу совместного распределения X и Y .

Задача 11. Известно, что график функции плотности вероятности случайной величины X выглядит следующим образом:

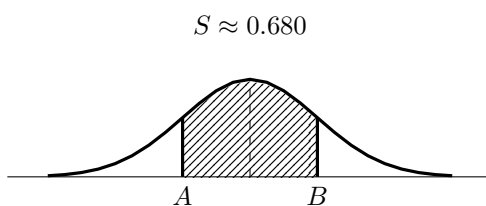


- Найдите $f(0)$, $f(-1)$.
- Найдите $P(-1 < X < 0.5)$.
- Найдите $F(1.5)$, где F – функция распределения.

Задача 12. Известно, что доля сторонников партии «Бобры и демократия» (выраженная в процентах) имеет нормальное распределение со средним значением 12 процентов и стандартным отклонением 4 процента.

- Найдите вероятность того, что процент сторонников этой партии в некотором случайно выбранном районе будет менее 20%.
- Найдите вероятность того, что процент сторонников этой партии в некотором случайно выбранном районе будет лежать в интервале от 10% до 25%.
- Найдите вероятность того, что процент сторонников этой партии в некотором случайно выбранном районе будет более 40%.

Ниже приведен график плотности распределения доли сторонников партии «Бобры и демократия» (в процентах). S – площадь заштрихованной области. Найдите значения A и B .



Задача 13. Случайная величина Z имеет стандартное нормальное распределение.

- Найдите $P(Z < 1.34)$.
- Найдите $P(1.2 < Z < 2.32)$.
- Найдите $P(Z > 2.56)$.
- Найдите $P(-1 < Z < 0.37)$.
- Найдите квантиль уровня 0.591.

Задача 14. Случайная величина X имеет нормальное распределение со следующими параметрами: $X \sim N(-2, \sigma^2 = 4)$.

- Найдите квантиль уровня 0.9564.
- Найдите квантиль уровня 0.8.
- Найдите квантиль уровня 0.64.
- Найдите квантиль уровня 0.0708.
- Найдите квантиль уровня 0.35.

Задача 15. Случайная величина X имеет нормальное распределение со средним -4 и дисперсией 81 . Случайная величина Y имеет нормальное распределение со средним -4 и стандартным отклонением 5 . Случайная величина W задана следующим образом: $W = 2X + 5Y - 6$. Какое распределение имеет случайная величина W ? Почему? Запишите параметры распределения случайной величины W (математическое ожидание и дисперсию).