ОП «Политология», 2017-18
Математика и статистика, часть 2
Тренировочные задания по блоку «Теория вероятностей»
Не является типовым вариантом контрольной работы! (3 модуль)
А. А. Макаров, А. А. Тамбовцева

Задача 1. Дан ряд распределения случайной величины X:

X	-1	0	2	6	7
p	0.2	0.5		0.1	0.1

a. Найдите $P(X \leq 2)$, $P(X < 5.5)$, $P(X > 7)$.
b. Найдите $F(1)$, $F(2.5)$, $F(8)$.
c. Найдите математическое ожидание X, то есть $E(X)$.
d. Найдите дисперсию X, то есть $Var(X)$.
e. Найдите стандартное отклонение X, то есть $sd(X)$.

Задача 2. Выборы в некотором сообществе устроены таким образом: каждый участник может голосовать за любое количество кандидатов, в том числе, против всех или за всех сразу. В выборах участвуют 4 кандидата. Про избирателя N известно, что с вероятностью 0.12 он проголосует против всех, с вероятностью 0.25 он проголосует за одного кандидата, с вероятностью 0.36 – за двух, с вероятностью – 0.14 за трех и с вероятностью 0.13 – за четырех.

Про избирателя W известно, что он с вероятностью 0.33 проголосует за одного кандидата, с вероятностью 0.45 за двух кандидатов, с вероятностью 0.08 за трех кандидатов, а также то, что он с равной вероятностью проголосует против всех и за всех кандидатов сразу.

a. Пусть случайная величина X – число кандидатов, за которых проголосует избиратель N. Запишите закон распределения случайной величины X.
b. Пусть Y – число кандидатов, за которых проголосует избиратель W. Постройте ряд распределения случайной величины Y.
c. Мы считаем избирателя «разборчивым», если среднее ожидаемое число кандидатов, за которых он голосует, менее 2. Есть ли среди избирателей N и W «разборчивый» избиратель? Если да, то кто из них «более разборчивый»?

Задача 3. Известно, что случайные величины X и Y независимы, и при этом $E(X) = 4$, $Var(X) = 9$, $E(Y) = -2$, $Var(Y) = 16$. Найдите математическое ожидание и дисперсию следующих величин:

a. $W_1 = 2X$
b. $W_2 = 2X - 3$
c. $W_3 = 4X + 5Y$
d. $W_4 = 3X - 7Y + 6$

Задача 4. Известно, что в компаниях A и B работают 3 категории сотрудников: высшая категория, средняя категория и низшая категория. Для каждой категории сотрудников зафиксирован размер заработной платы, но он может несильно меняться в зависимости от текущей ситуации в компании. Заработная плата сотрудников компании A описывается следующим образом:

– сотрудники высшей категории (их 30%) получают 80 тыс. руб.
– сотрудники средней категории (их 30%) 40 тыс. руб.
– сотрудники низшей категории (их 40%) 20 тыс. руб.

Заработная плата сотрудников компании B описывается следующим образом:

– сотрудники высшей категории (их 60%) получают 100 тыс. руб.
– сотрудники средней категории (их 10%) 80 тыс. руб.
– сотрудники низшей категории (их 30%) 10 тыс. руб.

В какой компании средняя (ожидаемая) заработная плата выше? В какой компании заработная плата распределена более однородно? Подтвердите ответ, используя две меры изменчивости: дисперсию и стандартное отклонение.

Задача 5. В некотором сообществе обсуждается принятие нового этического кодекса. Проводится голосование: каждый из членов сообщества независимо голосует за принятие или против. Сообщество довольно однородно – каждый из 12 участников с вероятностью 0.5 проголосует за принятие нового этического кодекса. С какой вероятностью будет принят новый этический кодекс, если для его принятия необходимо не менее 2/3 голосов «за»?

Задача 6.

a. W – бинарная случайная величина с параметром $p = 2/3$. Найдите математическое ожидание и дисперсию случайной величины W.
b. U – биномиальная случайная величина с параметрами $p = 4/5$, $n = 7$. Найдите математическое ожидание и дисперсию случайной величины U.

Задача 7. Посиделки студентов-политологов редко обходятся без горячих политических дебатов. Известно, что в 30 случаях из 40 спокойные посиделки политологов перерастают в бурные дискуссии на политическую тематику, причем известно, что это соотношение не изменяется от посиделок к посиделкам, и наличие дискуссий на одних посиделках никак не влияет на наличие дискуссий на других. Определите, с какой вероятностью из 10 посиделок:

a. более 8 закончатся политическими дебатами
b. менее 3 закончатся политическими дебатами
c. не менее 2 закончатся политическими дебатами

В скольких случаях, в среднем, посиделки политологов перерастают в дискуссии на политическую тематику?

Задача 8. Закон совместного распределения дискретных величин X и Y задан следующей таблицей:

$X \backslash Y$	-2	0	3
-2	0.1	0.2	0.05
3	0.05	0.3	

a. Запишите маргинальные распределения случайных величин X и Y.
b. Проверьте, являются ли случайные величины X и Y независимыми.
c. Найдите $Cov(X, Y)$ и $Corr(X, Y)$. Проинтерпретируйте полученные результаты.

Задача 9. Закон совместного распределения дискретных величин X и Y задан следующей таблицей:

$X \backslash Y$	1	3	4
9	0.03	0.15	0.12
10	0.07	0.35	0.28

Проверьте, являются ли случайные величины X и Y независимыми.

Задача 10. Случайная величина X задается следующим рядом распределения (с пропущенной вероятностью):

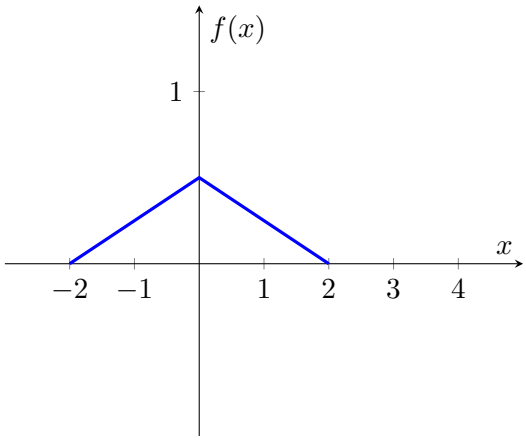
X	-1	0	2	6
p	0.2	0.5		0.1

Случайная величина Y задается следующим рядом распределения (с пропущенной вероятностью):

Y	0	3
p	0.4	

Известно, что случайные величины X и Y независимы. Постройте таблицу совместного распределения X и Y.

Задача 11. Известно, что график функции плотности вероятности случайной величины X выглядит следующим образом:

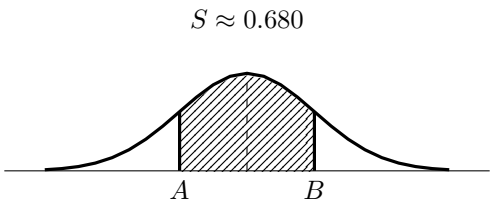


a. Найдите $f(0)$, $f(-1)$.
b. Найдите $P(-1 < X < 0.5)$.
c. Найдите $F(1.5)$, где F – функция распределения.

Задача 12. Известно, что доля сторонников партии «Бобры и демократия» (выраженная в процентах) имеет нормальное распределение со средним значением 12 процентов и стандартным отклонением 4 процента.

a. Найдите вероятность того, что процент сторонников этой партии в некотором случайно выбранном районе будет менее 20%.
b. Найдите вероятность того, что процент сторонников этой партии в некотором случайно выбранном районе будет лежать в интервале от 10% до 25%.
c. Найдите вероятность того, что процент сторонников этой партии в некотором случайно выбранном районе будет более 40%.

Ниже приведен график плотности распределения доли сторонников партии «Бобры и демократия» (в процентах). S – площадь заштрихованной области. Найдите значения A и B.



Задача 13. Случайная величина Z имеет стандартное нормальное распределение.

a. Найдите $P(Z < 1.34)$.
b. Найдите $P(1.2 < Z < 2.32)$.
c. Найдите $P(Z > 2.56)$.
d. Найдите $P(-1 < Z < 0.37)$.
e. Найдите квантиль уровня 0.591.

Задача 14. Случайная величина X имеет нормальное распределение со следующими параметрами: $X \sim N(-2, \sigma^2 = 4)$.

a. Найдите квантиль уровня 0.9564.
b. Найдите квантиль уровня 0.8.
c. Найдите квантиль уровня 0.64.
d. Найдите квантиль уровня 0.0708.
e. Найдите квантиль уровня 0.35.

Задача 15. Случайная величина X имеет нормальное распределение со средним -4 и дисперсией 81. Случайная величина Y имеет нормальное распределение со средним -4 и стандартным отклонением 5. Случайная величина W задана следующим образом: $W = 2X + 5Y - 6$. Какое распределение имеет случайная величина W? Почему? Запишите параметры распределения случайной величины W (математическое ожидание и дисперсию).