Совместный бакалавриат ВШЭ–РЭШ, 2017/18 уч. год
Дифференциальные уравнения (http://math-info.hse.ru/s17/h)
Семинар 15-16. Устойчивость положений равновесия и структурная устойчивость (24.05.2018)
И. В. Щуров, Н. А. Солодовников

Устойчивость положений равновесия

Определение 1. Рассмотрим автономное дифференциальное уравнение $\dot{x} = v(x)$. Пусть x_* — его положение равновесия, то есть $v(x_*) = 0$. Тогда x_* называется *устойчивым по Ляпунову* если для всякого $\varepsilon > 0$ найдётся такое $\delta > 0$, что для любого решения x с начальным условием $x(0) \in U_\delta(x_*)$ для всех $t \geq 0$ решение $x(t)$ лежит в $U_\varepsilon(x_*)$.

Определение 2. Положение равновесия x_* называется *асимптотически устойчивым*, если оно устойчиво по Ляпунову и существует такая окрестность $U \ni x_*$, что для всякого решения x с начальным условием $x(0) \in U$ справедливо утверждение: $\lim_{t\to+\infty} x(t) = x_*$.

Задача 1. [1] Исследовать устойчивость положений равновесия следующих уравнений и систем: определить, являются ли они устойчивыми по Ляпунову, асимптотически устойчивыми?

(a) $\dot{x} = 0$;

(b) $\dot{x} = 0, \quad \dot{y} = y$;

(c) $\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -x$;

(d) $\dot{x} = x^2 \quad \dot{y} = -y$;

(e) $\begin{cases} \dot{x} = y + x(1 - x^2 - y^2) \\ \dot{y} = -x + y(1 - x^2 - y^2) \end{cases}$

(f) $\begin{cases} \dot{x} = y - x(x^2 + y^2) \\ \dot{y} = -x - y(x^2 + y^2) \end{cases}$

Задача 2. Рассмотрим дифференциальное уравнение, в полярных координатах задающееся следующим образом:

$$\dot{\varphi} = \sin(\varphi) + 1, \quad \dot{r} = r(1 - r).$$

(a) Построить фазовый портрет в координатах (r, φ) и (x, y).
(b) Что можно сказать о поведении решений при $t \to +\infty$?
(c) Является ли положение равновесия $(r = 1, \varphi = -\pi/2)$ асимптотически устойчивым?
(d) Устойчивым по Ляпунову?

Задача 3. [2] Используя теорему об устойчивости по первому приближению, исследовать, при каких значениях параметров a и b асимптотически устойчиво нулевое решение. При каких оно является неустойчивым по Ляпунову? При каких теорема не даёт ответ на вопрос об устойчивости?

(a) $\begin{cases} \dot{x} = ax - 2y + x^2 \\ \dot{y} = x + y + xy \end{cases}$ (b) $\begin{cases} \dot{x} = y + \sin x \\ \dot{y} = ax + by \end{cases}$ (c) $\begin{cases} \dot{x} = ax + 2y \\ \dot{y} = -5x - 3y \end{cases}$

Задача 4. Известно, что существует решение $x(t) \in \mathbb{R}^n$ дифференциального уравнения $\dot{x} = v(x)$, такое что $x(0) \neq 0$ и $\lim_{t\to-\infty} x(t) = 0$. Что можно сказать об усточивости положения равновесия $x = 0$?

Структурная устойчивость

Определение 3. Дифференциальные уравнения $\dot{x} = v(x)$ и $\dot{y} = w(y)$ называются *орбитально топологически эквивалентными* если существует такая непрерывная замена координат, которая переводит фазовые кривые одного уравнения в фазовые кривые другого уравнения с сохранением направления движения.

Задача 5. Доказать, что уравнения $\dot{x} = x^2 - 1$ и $\dot{y} = y^2 - 4$ орбитально топологически эквивалентны. Фазовое пространство считать отрезком $[-10, 10]$.

Задача 6. Являются ли орбитально топологически эквивалентными уравнения $\dot{x} = x + x^3$ и $\dot{x} = x - x^3$? Фазовое пространство считать отрезком $[-10, 10]$.

Задача 7. Найти замену координат, которая переводит фазовый портрет уравнения

$$\dot{x} = -x + y \quad \dot{y} = -x - y \tag{1}$$

в фазовый портрет уравнения

$$\dot{x} = -x \quad \dot{y} = -y. \tag{2}$$

Определение 4. Дифференциальное уравнение $\dot{x} = v(x)$ называется *структурно устойчивым*, если оно орбитально топологически эквивалентно своему C^1-малому возмущению. Иными словами, существует такое $\varepsilon_0 > 0$, что для всякого w, такого, что $\|w(x)\| < \varepsilon_0$ и $\|\partial w/\partial x\| < \varepsilon_0$, дифференциальное уравнение $\dot{x} = v(x) + w(x)$ орбитально топологически эквивалентно исходному уравнению.

Задача 8. Доказать, пользуясь определением, что уравнение $\dot{x} = x^3$ не является структурно устойчивым.

Список литературы

[1] Арнольд В. И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. — Ижевск: Ижевская республиканская типография. 2000. — 368 с.

[2] Филиппов А. Ф. Сборник задач по дифференциальных уравннеиям. — Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2000.