

**Совместный бакалавриат ВШЭ–РЭШ, 2017/18 уч. год**  
**Дифференциальные уравнения** (<http://math-info.hse.ru/s17/h>)  
**Семинар 14. Линейные системы (17.05.2018)**

*И. В. Щуров, Н. А. Солодовников*

**Задача 1.** Решить уравнение на комплексной прямой  $z(t) \in \mathbb{C}$ :

- (a)  $\dot{z} = -2iz$ ;
- (b)  $\dot{z} = (2 + 4i)z$ ;
- (c)  $\dot{z} = (-1 + i)z$ .

**Задача 2.** Пусть  $z = x + iy$ ,  $x, y \in \mathbb{R}$ . Записать уравнения из задачи 1 в матричном виде в координатах  $(x, y)$ . Записать решения получившихся уравнений. Нарисовать фазовые портреты.

**Задача 3.** Найти все вещественные решения следующих систем. Определить тип особой точки.

- (a)  $\dot{x} = -x - 2y, \quad \dot{y} = 4x + 3y$ ;
- (b)  $\dot{x} = -x - 5y, \quad \dot{y} = x + y$ ;
- (c)  $\dot{x} = 8x + 25y, \quad \dot{y} = -2x - 6y$ ;
- (d)  $\dot{x} = 5x + 4y, \quad \dot{y} = -10x - 7y$ .

**Указание.** Найти какой-нибудь собственный вектор  $v$  матрицы системы. Он окажется комплексным, сопряженный к нему вектор также будет собственным (с сопряженным собственным значением). Пусть соответствующее собственное значение равно  $\lambda = \alpha + i\omega$ . Тогда у уравнения есть решения  $ve^{\lambda t}$  и  $\bar{v}e^{\bar{\lambda}t}$ , а также, по линейности, все их линейные комбинации. Чтобы найти вещественные решения, достаточно взять вещественную и мнимую части  $ve^{\lambda t}$  (почему они будут решениями?) и все их линейные комбинации.

**Задача 4.** При каком значении параметра  $\alpha$  система имеет особую точку типа «центр»? Нарисовать фазовый портрет системы при этом значении  $\alpha$ .

$$\dot{x} = \alpha x + 2y, \quad \dot{y} = -5x - 3y$$

**Задача 5.** Пусть  $z(t) \in \mathbb{R}^6$ . Рассмотрим систему  $\dot{z} = Az$ , где

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- (a) Найти вещественное решение этой системы с произвольным вещественным начальным условием  $z(0) = z^0$ .
- (b) Найти все начальные условия, при которых  $z(t) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow +\infty$ .

## Список литературы

- [1] Филиппов А. Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. — Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2000.