

Совместный бакалавриат ВШЭ–РЭШ, 2017/18 уч. год
Дифференциальные уравнения (<http://math-info.hse.ru/s17/h>)
Семинар 11. Линейные уравнения (12.04.2018)

И. В. Щуров, Н. А. Солодовников

Задача 1. С помощью метода вариации постоянных решите следующие уравнения:

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} \quad y = x(y' - x \cos x); & \text{(c)} \quad 2x(x^2 + y)dx = dy; & \text{(e)} \quad (2e^y - x)y' = 1; \\ \text{(b)} \quad xy' + (x + 1)y = 3x^2e^{-x}; & \text{(d)} \quad (x + y^2)dy = ydx; & \text{(f)} \quad y' = \frac{y}{3x - y^2}. \end{array}$$

Задача 2. Пусть $x_1(t)$ и $x_2(t)$ — два каких-то различных решения неоднородного линейного дифференциального уравнения первого порядка. Выразить через них решение того же уравнения с начальным условием $x(t_0) = x_0$ для произвольных t_0, x_0 .

Задача 3. Пусть $x = \varphi(t; x_0)$ — решение уравнения с начальным условием $x(0) = x_0$. Найти $\frac{\partial \varphi}{\partial x_0}$ при $x_0 = 0$. Как ведут себя интегральные кривые, близкие к $x \equiv 0$, когда начальное условие немного отклоняется от 0, при $t \rightarrow +\infty$?

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} \quad \dot{x} = 2x; & \text{(f)} \quad \dot{x} = t \sin x; \\ \text{(b)} \quad \dot{x} = \sin x; & \text{(g)} \quad \dot{x} = \sin x \sin t; \\ \text{(c)} \quad \dot{x} = xt; & \text{(h)} \quad \dot{x} = (x + x^2)t; \\ \text{(d)} \quad \dot{x} = -xt; & \text{(i)} \quad \dot{x} = x \sin(x + t); \\ \text{(e)} \quad \dot{x} = x \sin t; & \text{(j)} \quad \dot{x} = x^2(t + x). \end{array}$$

Задача 4. Найти все решения уравнения, представляющиеся в виде $x(t) = Ce^{\lambda t}$. Найти все решения уравнения.

$$\begin{array}{l} \text{(a)} \quad \ddot{x} - 4x = 0; \\ \text{(b)} \quad \ddot{x} - 5\dot{x} + 6x = 0; \\ \text{(c)} \quad \ddot{x} + 4x = 0; \end{array}$$