

Совместный бакалавриат ВШЭ–РЭШ, 2017/18 уч. год
Дифференциальные уравнения (<http://math-info.hse.ru/s17/h>)
Семинар 10 (22.03.2018)

И. В. Щуров, Н. А. Солодовников

Определение 1. Уравнение вида

$$y' = F(y/x)$$

называется *однородным уравнением* (не путать с однородным линейным уравнением — это совсем другая вещь).

Замечание 1. Однородные уравнения сводятся к уравнениям с разделяющимися переменными заменой $z = y/x$.

Задача 1. Решите следующие уравнения:

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} (x + 2y)dx - xdy; & \text{(c)} (y^2 - 2xy)dx + x^2dy = 0; \\ \text{(b)} (x - y)dx + (x + y)dy = 0; & \text{(d)} 2xydx + (x^2 - y^2)dy = 0; \end{array}$$

Задача 2. Для следующих систем осуществить переход к полярным координатам, то есть записать уравнения для новых координат φ и r , где $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$.

Построить фазовые портреты в новых и старых координатах.

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} \dot{x} = -y, \quad \dot{y} = x; & \text{(e)} \dot{x} = x + y, \quad \dot{y} = -x + y; \\ \text{(b)} \dot{x} = y, \quad \dot{y} = -x; & \\ \text{(c)} \dot{x} = x - y, \quad \dot{y} = x + y; & \text{(f)} (*) \begin{cases} \dot{x} = y + x(1 - x^2 - y^2) \\ \dot{y} = -x + y(1 - x^2 - y^2) \end{cases} \\ \text{(d)} \dot{x} = -x - y, \quad \dot{y} = x - y; & \end{array}$$

Задача 3. Для следующих систем найти какой-нибудь глобальный непостоянный непрерывный первый интеграл, либо доказать, что его не существует.

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} \dot{x} = \sin(x + y), \quad \dot{y} = \cos(x + y + z), \quad \dot{z} = 0; \\ \text{(b)} \dot{x} = -y, \quad \dot{y} = x, \quad \dot{z} = \sin(x^2 + y^2 + z^2); \\ \text{(c)} \dot{x} = x, \quad \dot{y} = 2y, \quad \dot{z} = -3z. \\ \text{(d)} \dot{x} = x, \quad \dot{y} = 2y, \quad \dot{z} = 3z. \end{array}$$

Задача 4. Найти все периодические решения системы уравнений.

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -x, \quad \dot{z} = -z.$$

Задача 5. Найти фазовые кривые.

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} \dot{x} = x^2, \quad \dot{y} = y(x + y); \\ \text{(b)} \dot{x} = y^2 + 2y + 1, \quad \dot{y} = x^2 - 1; \\ \text{(c)} \dot{x} = 2y \cos^2 x, \quad \dot{y} = 1 + y^2 \sin 2x; \\ \text{(d)} \dot{x} = -y + 2x, \quad \dot{y} = x + 2y; \end{array}$$

Задача 6. Найти все решения уравнения $\dot{x} = \sqrt[3]{x^2}$ с начальным условием $x(-3) = -64$, если они существуют.

Задача 7. Найти все значения параметра s , при которых система

$$\dot{x} = 5y, \quad \dot{y} = sx$$

имеет непостоянные периодические решения. Для каждого из этих значений s записать уравнение фазовых кривых, соответствующих периодическим решениям.

Задача 8. Найти все значения параметра $\alpha \in \mathbb{R}$, при которых существует непостоянное, но равномерно ограниченное (по всем t) решение уравнения

$$\ddot{x} = -x^2 + 18x + \alpha.$$